حساب التفاضل والتكامل

ترجمة الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم
الفلكية بمدرسة المهندسخانة
الخديوية الكائنة ببولاق
مصر المحمية

بسم الله الرحمن الرحيم

نحمدك يا من تعطفت بتواصل ال[illegible] الانساب * وتكرمت بتكامل ما رزقته من سحاب * ونصلي ونسلم على نبيك الذي جاء بالدوال القواطع * وافتت لنهاية الكبرى معجزته السواطع * مهندس ابناء انبياء الامم الخاليه * ومهندس مجاري بحر الشريعة بالهندسة العاليه * من أقام بما ارشدنا اليه من اساس معروفك الممدود * ورسم جيوب ظل كرمك الظليل الممدود * صلى الله وسلم عليه وعلى آله الواصلين الى طرق النهايات * واصحابه البالغين في كميات المعادلات اقصى الغايات * وبعد فيقول الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم الفلكيه * في مدرسة دار الهندسة الداوودية الملكيه * الكائنة ببولاق مصر المحروسه * صرف الله عنها مكاره الدهر وبؤوسه * ان مكارم الحضرة الآصفية الخديويه * والدولة المحمدية العلويه * قد تدفق بحر احسانها المديد الكامل لعموم اسيار المصريه بفيضه العميم الشامل * فردّ على مملكتها ضالتها * واعاد اليها

تيهها

تيهها على غيرها ردائها بانشاء ما أبدع من الآثار المستحسنة الجميلة * و نشر الحلية الجليلة * التي لا تحصر ولا تحصى * ولا تستقرى ولا تستقصى * مع تجديد ما درس من معالم العلوم والفنون * ر د ه ر ما خفي من سرها المصون المكنون * حيث اوجد ثانيا بأسرها * واحياها بنشره ونشرها * بعد ان محيت آثاره مددا مديده * وعفت رسومها ازمنة عديده * حتى البسها حلة الكمال * وأفرغها في قالب الحسن والجمال * فكانت سيكه ... وما ذلك على العزيز بعزيز * ولما كان العزيز الباني من احسن تلك العلوم وابهاها * وابهج هاتيك الفنون و رهاها * وكنت منذ دخلت هذه المدرسة و تأنقي في عداد التلامذه * ما فتئت اتعلم حتى سررت ... وقمت بوظيفة التدريس مدة سنين * مستظلا بظل الاحسان و لله ... * تعاملت مع الطلبة احسن التعامل * وقرأتهم كتاب الموسيو بوشارلا في حساب التفاضل و التكامل * وحيث اني لوحظت بأعين العنايه * ويسر لي الله سبيل الهدايه * بادرت الى عبارته الفرنساوية بالترجمة و التعريب * ونظمتها في سلك براعة التسهيل والتقريب * حيث بسطت بعض العبارات * ووضحتها بزيادة على ما في الاصل من الاشارات ... على طرف الثمام للمبتدى * لتتناولها يد الطالب المبتدى * ونزهتها عن الحشو والحصر * ومثلتها طبعا بمطبعة الحجر ثم اني ضممت اليها درر فوائد * تعتد في معظمها فرائد * يكثر نفعها في علم المكانيك وغيره * مما يلوح وجه ثمرته وخيره * والحقت بها ... في علم ... جليلة الشان ... وهو حضرة ... صاحب البراعه * المحرر ... ولما ... تلك الترجمة كتابا علميا * وصارت بهاتين التتميمتين عقدا نضيا * وقدمته لجناب العالي * ذو الهمم والمعالي * من هو واحد بالجامع بين المعارف والعوارف * والتالد من المجد والطارف * العارف باذن الصوت منطوقا ومفهوما * ... ادهم بيك مدير المدارس عموما * قد شرفها باطلاعه الشريف عليها * واسعدها بنظره السعيد اليها * صدر امره الكريم بطبعها * ارادة لتكثير ثمرتها ونفعها * حيث

اتى منها رشدها * وعلم انها قد بلغت اشدها * فدونكها ايها الطالب * يسر الله لي ولك كل مطالب * امين اللهم امين * يارب العالمين

(مقدمه)

قال نوطن ان من نظر في تاريخ المعارف وجد فيه ان القريحة البشرية تقف وقتا بعد ان ترتقي الى أعلى الادراكات والاختراعات كأنّ مانعا يمنعها من ارتقائها ثم تعود وترتقي ثانيا بقوة اخرى فتظهر باستكشاف عظيم من المستكشفات التي تتغير بها صورة العلم بالكلية * وان من هذا القبيل ما اخترعه المعلم ديكارته وندكارتوس من تطبيق الجبر على الهندسة فانه افتتح بذلك طريقا كانت مجهولة لاسلافه من العلماء * ومنه ايضا ما اغرب به المعلم نوطون والمعلم لبنتز على علماء بلاد اوربا من اختراع تحليل اخر اعلى درجة من هندسة المعلم ديكارته اذ لا يتيسر استكشاف اخر يكون به تشريف العقل بشرف مثله حيث صار اللانهائي الذي هو مجرد تخيل مستطيعا للحساب وجرت منه الاعاجيب وقد اراد بعض من الفلاسفة ان يوقعوا التشكك في صحة هذه التحاليل العجيب فلم يبلغوا ذلك ولم يتيسر لهم ان ينكروا نتائجه ولم يترتب على بحثهم الا زيادة حث علماء الهندسة على زيادة بذل الجهد في البحث عن حقيقة الوجود الفكري للحسابات الجديدة وكان اول من علم هذا السر هو المعلم نوطون حيث جعل حساب التفاضل طريقة للوصول الى اول نسب الكميات واخرها التي جعلها طريقة للوصول الى نهايات النسب ثم جاء المعلم دلمبير فرأى ان نظريات المعلم نوطون مشتملة على حقيقة الوجود الفكري لحساب التفاضل وانه يتيسر بواسطة طريقة النهايات ان يحصل التوضيح الذي في الطريقة الموجودة عند لبنتز ويقطع النظر عن التحرز الذي هو معنى ما لا نهاية له بحساب التفاضل وقد تكلم قوم من علماء الهندسة قبل المعلم دلمبير في هذه المادة على طريقة النهايات منهم المعلم كورنت خصوصا ولكن لم يحصل الانتفاع التام بهذه الطريقة لتعلقها بالكلية من الوجود الفكري لطريقة الصغيرات جدا التي هي عبارة عن اختصار طريقة النهايات الا منذ حصل اثباتها بواسطة نظرية

المعلم

المعلم تيلور

وبالنظر الى هـذا المعنى ليست طريقة الصغيرات جدّا الاعبارة عن طريقة مستقربة لايجاد تفاضلات الدوال المتنوعة وبها تنطبع تلك التفاضلات فى الاذهان بواسطة اشكال هندسية فى غاية البساطة والاختصار تظهر للعقل على وجه اوضح من التصورات المطلقة الخيالية وبالجملة فهذه الطريقة تصير ضرورية لابدّ منها ولاغنى عنها فى الفروع العالية من علم الميكانيك والفلك اذبدونها يكون حل المسائل العملية من المشكلات الصعبة فى اغلب الاحيان ومن ثم كان افاضل علماء الهندسة يستعملونها كثيرا فى مؤلفاتهم

وقد كان فيما سلف من الزمان لهذه الطريقة رونق لوجود المذكرى محامون قد بذلوا الجهد فى الذب عنها وذلك لما انه اذا التزم الانسان السلوك فيها على مقتضى بعض دعاوى مخصوصة تظهر عليها علامة الصحة والضبط الرياضى التام ويتراءى عليها انها ناتجة بالطبع عن اصل عام وقاعدة كلية ترجع اليها وهـذه القاعدة المذكورة لم تزل الى الآن معتبرة من الضروريات لكن لما رأيت اننا اذا اعتبرنا اللانهائى بالوجه المقرر فيها نجد انه ينتج عنها نتائج لا يمكن قبولها استحسنت ان ابرهن عليها بطريقة الصغيرات جدّا اصلا آخر هو مبنى كذلك على ما علم للناس الفوائد المتعلقة باللانهائى انه اقرب الى الصواب بسبب تصور النهايات التى توجد فيه ضمنا

واذا كانت طريقة النهايات متممة لطريقة الصغيرات جدّا بسبب ماتوجد فيها من الخلل فان طريقة المعلم لاجرانجيه متممة كذلك لطريقة النهايات وذلك بربط المعاملات التفاضلية بالجبر المحض ولابأس بجعل هذه الطرائق الاربع كأنها طريقة واحدة ولذلك اذا قابلناها نرى ان الوصول الناتجة عنها مشتركة بين جميعها وان من ارد فهمها كما ينبغى عليه الا ان يضم شيأ قليلا الى طريقة النهايات فقط وتؤول طريقة المعلم لاجرانجيه حينئذ الى ان تكون عبارة عن نظرية صارت سهلة جدّا حيث غيرت طريقة اثباتها

ولم التزم توضيح النظريات المتنوعة التى تتركب منها هذه الرسالة وانما التزمت

توضيح سائر العمليات كما سلكت هذا المسلك في سائر مؤلفاتي الرياضية لما اني متحقق ان تركها لا يترتب عليه زيادة الاعتقاد في كثرة معارف المؤلف وان المؤلف انما يعرف مقامه بما يبديه من كيفية الدلالة على تصوراته وبما يقرره من الملحوظات المخترعة في مؤلفاته

ولنضم الى ما قررناه انه اذا التزم عدم ترك التصورات المتخللة في صلب النظريات لا يمكن اجتناب التطويل المخل بها الا بواسطة الضبط والتحرير ويزيد الامر اشكالا اذا كان بعض الكتاب معدا للبرهنة على المسائل وابداء اسبابها ومن اطلع على كثرة المواد المتنوعة المقررة في هذا الكتاب عرف حق المعرفة ما يصدر لي من الموانع في تأليفي له ومن الزيادات التي ضممتها الى هذا الكتاب في هذه الطبعة الجديدة مسألة النقط الغريبة والنهايات الكبرى والصغرى للدوال ذات المتغيرتين والمنحنيات القطبية ونظرية المتغيرة المستقلة او التي ليست بمطلقة والحلول الخصوصية للمعادلات التفاضلية وتكعيب الاجسام المنتهية بالسطوح المنحنية وتربيع السطوح المذكورة وشروط تكامل الدوال ذات الثلاث متغيرات والمعادلات التفاضلية بدرجة ثانية والمعادلات المتماثلة وغير ذلك وبالجملة فقد ختمت هذا المؤلف بنبذة تتعلق بالمعادلات التفاضلية الجزئية مع بعض ملحوظات عمومية على الدوال الاختيارية تتم بها تكاملات تلك المعادلات وبهذا توصلت الى شرح الطريقة التي تتعين بها الدالة الاختيارية التي تدخل في المعادلة عند توفر معادلات الشرط واعلامها

والطريقة التي بحثت بها عن تلك المسألة المهمة معتبرا السطوح المنحنية تشابه الطريقة التي استعملتها باعتبار الثوابت الاختيارية ولذا بينت بواسطة المنحنيات كيف توجد الثابتة بعينها للتكامل بعد ان حذفت تلك الثابتة عند اخذ التفاضل وهي مسألة يظهر لي انه لم يحظ بها احد قبلي

حساب التفاضل

تفاضل الكميات الجبرية

* ١ * حساب التفاضل يبحث فيه عن النتائج التى تنشأ عن الكميات اذا اخذ بعض متغيراتها زيادة ما والمتغير ما صح تغيره فى المعادلة كما ان الثابت ما ثبت على حالة غير متغيرة بطول العملية معلوما كان او مجهولا ويقال للمتغير دالة لمتغير اخر متى ساوى الاول كمية حسابية يدخل فيها الثانى بارتباط ايا ما كان فان ص فى معادلات

$$ص = \sqrt{ح^{٢} - س^{٢}} \quad و \quad ص = س^{٣} - ٣ ب س^{٢}$$

$$و \quad ص = ح س^{٢} \quad و \quad ص = ب + ح س^{٣}$$ هى دالة س

* ٢ * ولنعتبر دالة فى حالة ازديادها بازدياد المتغير الشاملة هى له فان كل دالة لمتغير س يمكن بيانها براسى منحن س م م َ (شكل ١) وليكن لاجل ذلك ا ع = س و ع م = ص ونفرض ان الافقى ا ع يأخذ زيادة ع ع َ = هـ فالراسى ع م يصير عند ذلك ع َ م َ = ص َ ولاجل ايجاد مقدار هذا الراسى الجديد يشاهد انه يلزم تغيير س بكمية س + هـ فى معادلة المنحنى وحينئذ مقدار ص الذى يستخرج منها يكون هو عين مقدار ص َ فاذا كانت معادلة ص = م س ٢ مثلا يوجد ص َ بتغيير س بكمية س + هـ و ص بآخر ص َ ويكون $ص َ = م س^{٢} + ٢ م س هـ + م هـ^{٢}$

* ٣ * ولنأخذ الآن معادلة $ص = س^{٣}$ .... (١)

ونفرض فيها ان ص تصير ص َ حين تغير كمية س بكمية س + هـ فيحدث لنا $ص َ = (س + هـ)^{٣}$ وبحلها يوجد

$$ص َ = س^{٣} + ٣ س^{٢} هـ + ٣ س هـ^{٢} + هـ^{٣}$$

وبطرح معادلة (١) من هذه المعادلة يوجد

$$ص َ - ص = ٣ س^{٢} هـ + ٣ س هـ^{٢} + هـ^{٣}$$ وبقسمتها

على هـ يوجد

$$\frac{\text{صَ} - \text{ص}}{\text{هـ}} = ٣\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} \cdots\cdots (٢)$$

وحيث كانت كية صَ ــ ص تبين الزيادة التى تأخذها كية ص حين تزداد كية س بمقدار هـ يعلم من ذلك ان كية $\frac{\text{صَ} - \text{ص}}{\text{هـ}}$ هى نسبة الزيادة التى تأخذها الدالة المفروضة ص الى الزيادة التى ياخذها متغير س

واذا نظرنا الى الطرف الثانى من هذه المعادلة فنشاهد أن هذه النسبة تأخذ فى النقصان كلما نقصت كية هـ وحين تصير كية هـ صفرا تؤول هذه النسبة الى ٣ س^{٢} ويعلم من ذلك ان حد ٣ س^{٢} هو نهاية النسبة $\frac{\text{صَ} - \text{ص}}{\text{هـ}}$ وهذا الحد هو الذى ينحى نحوه كلما اخذ هـ فى النقص

٤ لكنه بفرض هـ = ٠ تؤول كية صَ ــ ص الى صفر ايضا فمعادلة (٢) تؤول حينئذ الى هذه

$$\frac{\cdot}{\cdot} = ٣\,\text{س}^{٢} \cdots\cdots\cdots (٣)$$

ولا استحالة فى هذه المعادلة لانه يفهم من الجبر ان $\frac{\cdot}{\cdot}$ قد يكون دالا على سائر انواع الكميات فتارة يستدل به على كية محدودة وتارة يبين كية غير محدودة وتارة يكون صفرا ولك ان تقول انه حيث كانت قيمة الكسر لا تتغير بقسمة حديه على عدد واحد ينتج ان تصغير الحدين غير ضار فى مقداره وينبنى على ذلك ان حقيقة الكسر لا تتغير اذا بلغ حداه النهاية فى الصغر يعنى اذا انعدما وكسر $\frac{\cdot}{\cdot}$ الذى يوجد فى معادلة (٣) هو عبارة عن رسم حل محل نسبة زيادة الدالة الى زيادة المتغير وحيث لم يبق هذا الرسم اثرا للمتغير المذكور لزم ابداله برمز

$\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}$ ليعلم به ان الدالة كانت ص والمتغير كان س

و وَص و وَس يتغير اعتبارهما فى الحقيقة على حسب جنس المسألة فقد يعتبران اصفارا اعداما وقد يعتبران كيات صغيرة جدا ويوجد اذ ذاك

وَص

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٣\,\text{س}^٢ \quad \cdots\cdots\cdots (١)$$

[illegible] $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ [illegible] ٣ $\text{س}^٢$ [illegible]

[illegible] المرونة

* ٥ [illegible] $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ هو رمز يدل على كمية

٣ $\text{س}^٢$ [illegible] معادلة (٤) فكان الواجب أن

[illegible] $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

٦ * [illegible] عن تفاضل دالة [illegible] ٣ [illegible] بالوجه المشروح

$\text{ص} = \text{ح} + ٣\,\text{س}^٢$

[illegible]

[illegible] $\text{ص}' = \text{ح} + ٣\,\text{س}^٢ + ٦\,\text{س}\,\text{هـ} + ٣\,\text{هـ}^٢$

[illegible] معادلة $\text{ص} = \text{ح} + ٣\,\text{س}^٢$ [illegible]

$\text{ص}' - \text{ص} = ٦\,\text{س}\,\text{هـ} + ٣\,\text{هـ}^٢$ [illegible]

[illegible]

$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٦\,\text{س}$ [illegible] $\text{وص} = ٦\,\text{س}\,\text{وس}$

٧ [illegible] $\text{ص} = \text{س}^٣ - \text{و}^٢$

[illegible] بكمية [illegible] هـ [illegible]

$\text{ص}' = \text{ح}\,\text{س}^٣ + ٣\,\text{ح}\,\text{س}^٢\,\text{هـ} + ٣\,\text{ح}\,\text{س}\,\text{هـ}^٢ + \text{ح}\,\text{هـ}^٣ - \text{و}^٢$ [illegible]

[illegible] ٣ [illegible]

$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٣\,\text{ح}\,\text{س}^{٢}$ وهذا هو المكرر التفاضلي للدالة المفروضة والتفاضل
يكون $\text{و ص} = ٣\,\text{ح}\,\text{س}^{٢}\,\text{و س}$

٨ . ولنفرض انه مطلوب ايجاد تفاضل $\text{ص} = \frac{١ - \text{س}^{٣}}{١ - \text{س}}$
ولنجري عملية القسمة فيحدث (١) $\text{ص} = ١ + \text{س} + \text{س}^{٢}$
فنضع س + هـ محل س ، و ص' محل ص فيحدث
$\text{ص}' = ١ + \text{س} + \text{هـ} + \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}$ وبترتيب هذه بالنسبة
الى هـ يكون $\text{ص}' = ١ + \text{س} + \text{س}^{٢} + (١ + ٢\,\text{س})\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}$
ومن هذا يستخرج $\frac{\text{ص}' - \text{ص}}{\text{هـ}} = ٢\,\text{س} + ١ + \text{هـ}$ وفي النهاية يوجد

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٢\,\text{س} + ١$$

وتفاضل $\frac{١ - \text{س}^{٣}}{١ - \text{س}}$ يكون حينئذ $(٢\,\text{س} + ١)\,\text{و س}$

٩ * ولنشرح ايضا بهذا المثال
$\text{ص} = (\text{س}^{٢} - ٢\,\text{ح}^{٢})(\text{س}^{٢} - ٣\,\text{ح}^{٢})$ واذا نحل الطرف الثاني فنجد
$\text{ص} = \text{س}^{٤} - ٥\,\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} + ٦\,\text{ح}^{٤}$ ونضع س + هـ محل س و ص' محل ص ثم نرتبه بالنسبة الى هـ فيوجد
$\text{ص}' = \text{س}^{٤} - ٥\,\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} + ٦\,\text{ح}^{٤} + (٤\,\text{س}^{٣} - ١٠\,\text{ح}^{٢}\text{س})\,\text{هـ} + (٦\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{ح}^{٢})\,\text{هـ}^{٢} + ٤\,\text{س}\,\text{هـ}^{٣} + \text{هـ}^{٤}$ واذن يكون
$\frac{\text{ص}' - \text{ص}}{\text{هـ}} = ٤\,\text{س}^{٣} - ١٠\,\text{ح}^{٢}\text{س} + (٦\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{ح}^{٢})\,\text{هـ} + ٤\,\text{س}\,\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣}$ وبالارتقاء الى النهاية يوجد
$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٤\,\text{س}^{٣} - ١٠\,\text{ح}^{٢}\text{س}$ وبالضرب في و س يظهر أن
التفاضل المطلوب يكون $\text{و ص} = (٤\,\text{س}^{٣} - ١٠\,\text{ح}^{٢}\text{س})\,\text{و س}$

١٠ * و س هي بنفسها تفاضل كمية س لانه اذا
فرض ص = س يوجد ص' = س + هـ ويكون

ص

[illegible] — ص = هـ [illegible] يوجد [illegible]

وحيث لم تكن كمية [illegible] في الطرق [illegible] من هذه [illegible]

يكفي لاجل الانتقال الى النهاية [illegible]

ذلك يكون [illegible] = ١ ومنه [illegible]

١١ [illegible] ولنتأمل [illegible] في بعض [illegible]

وفى هذه الحالة يلزم استبدال كمية [illegible]

كما تقدم

فلايجاد تفاضل [illegible] مثلا [illegible]

[illegible] — هـ فيوجد

[illegible]

[illegible]

ونجد بالانتقال الى النهاية [illegible]

[illegible] وحيث [illegible]

نوجد [illegible]

[illegible]

[illegible]

١١ [illegible]

[illegible]

[illegible]

بعض [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] .... الخ

[illegible] ع = ص

[illegible] هـ = ٠ فى المعادلة الاخيرة يؤول طرفها الثانى الى [illegible] فاذن [illegible] ص [illegible] صارت صَ بسبب تغير [illegible] بكمية س + هـ فبانعدام هـ [illegible] وهى ص [illegible] ان ص [illegible]

١٣ * [illegible] شرح كيفية تعميم طريقة التفاضل [illegible] تغيرها س بكمية س + هـ فى معادلة ص = ق (س) التى [illegible] ق (س) (بل صرف النظر عن [illegible] تعميم) [illegible] يكون مرتبا بحسب الدرجات التصاعدية لكمية هـ [illegible] هذا الناتج

صَ = [illegible] + [illegible] .... الخ

ثم [illegible] ص [illegible] ع المساوى له كما تقدم برهانه فى (١١) وحدث صَ = ص [illegible] .... الخ أو

[illegible] = [illegible] .... الخ وفرضنا

هـ = ٠ فى [illegible] = ح

ومن هذا [illegible] ان المكرر التفاضلى يساوى مكرر الحد المحتوى على كمية هـ [illegible] فى حل ق (س + هـ) المرتب بحسب الدرجات التصاعدية لكمية هـ

* (تفاضل حاصل ضرب متغيرين) *

* ١٤ * لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين [illegible] لمتغير واحد س ونرمز لهما بحرفى ص و ع ثم نغير كل منهما بتغير س بكمية س + هـ ونرمز للنواتج بحرف صَ و عَ ونفرض

ونفرض انهما يكونان بعد الترتيب بالنسبة الى ه هكذا

صَ = ص + ح ه + ء ه٢ + ر ه٣ + ... الخ (٥)

عَ = ع + حَ ه + ءَ ه٢ + رَ ه٣ + ... الخ (٦)

فبالارتقاء الى النهاية يوجد

و ص / و س = ح و و ع / و س = حَ .... (١)

وبضرب معادلتى (٥) و (٦) فى بعضهما يوجد

عَ صَ = ع ص + ع ح ه + ع ء ه٢ + الخ

+ ص حَ ه + [illegible] الخ

+ ص ءَ ه٢ + الخ

ثم انه اذا طرح ع ص من كل من الطرفين وقسم [illegible] على ه يوجد

(عَ صَ − ع ص) / ه = ح ع + حَ ص + (ح حَ [illegible]) ه + [illegible] الخ

ولايجاد نهاية النسبة يفرض ه = ٠ فيوجد

و٠ ع ص / و س = ح ع + حَ ص

(ووضع النقطة فى و٠ ع ص يدل على انه يراد اخذ تفاضل ع ص) ثم نضع فى هذه المعادلة عوضا عن ح و حَ مقاديرها المبينة بمعادلة (١) فيوجد

و٠ ع ص / و س = ع و ص / و س + ص و ع / و س وبحذف المقام المشترك

يوجد أن و٠ ع ص = ع و ص + ص و ع

ويفهم من ذلك انه لايجاد تفاضل حاصل ضرب [illegible] يلزم ضرب كل منها فى تفاضل الآخر ثم جمع الحاصل

* ١٥ * وبواسطة هذه الطريقة يوجد [illegible] تفاضل حاصل ضرب ثلاثة متغيرات ولذلك يفرض [illegible] مثلا [illegible]

ومن بعد الذى تقدم يوجد

و. صل = صول + لوص .... (٨)

وحيث كان ل = ع ر فبأخذ تفاضله بحكم المقرر يكون

ول = ع ور + ر وع

واذا وضعنا في معادلة (٨) عوضا عن ل و ول المقادير الاخيرة

يوجد ان و. صع ر = صع ور + ص ر وع + ع ر وص

ويشاهد حينئذ ان الطريقة المتقدمة تجري ايضا على تفاضل حاصل ضرب ثلاث متغيرات يعني انه لايجاد هذا التفاضل يكتب حاصل ضرب صع ر ويغير فيه كل متغير بتفاضله على التوالي وحاصل جمع الحواصل الحادثة يكون هو التفاضل المطلوب

* ١٦ * وهذه قاعدة عامة لايجاد تفاضل حاصل ضرب اي عدد كان من المتغيرات

* ١٧ * حيث ان تفاضل كمية حس هو حوس يعلم من ذلك انه متى توجد كمية ثابتة في حاصل ضرب ينبغي ان يؤخذ تفاضل حاصل الضرب بصرف النظر عن المضروب الثابت وبعد أخذ التفاضل يضرب الناتج في الكمية الثابتة ومن ثمة كان تفاضل كمية حس ص مثلا

حس وص + حص وس

* ١٨ * والكمية الثابتة ليس لها تفاضل لانه اذا فرض ص = حس + ب ثم اجريت عملية (بند ٧) ظهر أن وص = حوس وهذا الناتج هو عين الناتج الذي ينتج اذا لم يكن للثابتة ب وجود

*(في تفاضل الكسر)

* ١٩ * تفاضل كسر $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ يساوي $\frac{\text{ص وس} - \text{س وص}}{\text{ص}^2}$

ولاثبات ذلك نفرض ان $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ع ثم نحذف المقام فيوجد

س = صع وبموجب (بند ١٤) يكون وس = صوع

+ ع وص ومن هذا يستخرج منه صوع = وس − ع وص

واذا

واذا وضعنا في الطرف الثاني عوضا عن ع مساويها $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ يوجد

$\text{ص}\,\text{و}\text{ع} = \text{و}\text{س} - \frac{\text{س}}{\text{ص}}\,\text{و}\text{ص}$ وباشتراك المقام يكون

$\text{ص}\,\text{و}\text{ع} = \frac{\text{ص}\,\text{و}\text{س} - \text{س}\,\text{و}\text{ص}}{\text{ص}}$ واخيرا $\text{و}\text{ع} = \frac{\text{ص}\,\text{و}\text{س} - \text{س}\,\text{و}\text{ص}}{\text{ص}^{٢}}$

او $\text{و}\cdot\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}\,\text{و}\text{س} - \text{س}\,\text{و}\text{ص}}{\text{ص}^{٢}}$

(في تفاضل المتغير ذي الأس)

* ٢٠ * حيث انه بقسمة جميع حدود معادلة

$\text{و}\cdot\text{ص}\text{ع}\text{ر} = \text{ص}\text{ع}\,\text{و}\text{ر} + \text{ص}\text{ر}\,\text{و}\text{ع} + \text{ع}\text{ر}\,\text{و}\text{ص}$ المبينة في (بند ١٥

على ص ع ر يحدث $\frac{\text{و}\cdot\text{ص}\text{ع}\text{ر}}{\text{ص}\text{ع}\text{ر}} = \frac{\text{و}\text{ر}}{\text{ر}} + \frac{\text{و}\text{ع}}{\text{ع}} + \frac{\text{و}\text{ص}}{\text{ص}}$

وعلى العموم اذا فرضنا مضاريب متغيرة بعدة م وليكن س ص ع ر ط الخ

فتفاضل حاصل ضربها مقسوما على هذا الحاصل يكون

$\frac{\text{و}\cdot\text{س}\text{ص}\text{ع}\text{ر}\text{ط}\cdots\text{الخ}}{\text{س}\text{ص}\text{ع}\text{ر}\text{ط}\cdots\text{الخ}} = \frac{\text{و}\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{و}\text{ص}}{\text{ص}} + \cdots + \frac{\text{و}\text{ر}}{\text{ر}}\ \text{الخ}$ (٩)

واذا فرضنا ان س = ص = ع = ر = ط = الخ فمعادلة (٩) تصير

$\frac{\text{و}\cdot\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{م}}} = \frac{\text{و}\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{و}\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{و}\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{و}\text{س}}{\text{س}} + \cdots$ بعدد م

او $\frac{\text{و}\cdot\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{م}}} = \frac{\text{م}\,\text{و}\text{س}}{\text{س}}$ وبضرب [illegible] س$^{\text{م}}$

يوجد $\text{و}\text{س}^{\text{م}} = \frac{\text{م}\,\text{س}^{\text{م}}\,\text{و}\text{س}}{\text{س}} = \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}\,\text{و}\text{س}$

* ٢١ * ويعلم من ذلك ان تفاضل المتغير ذي الأس يساوي [illegible] مضروبا فيه [illegible] الاصلي لاواحد والحاصل مضروب في و س

(مثال)

حيث ان $\text{س}^{\text{م}} = \text{س}\times\text{س}\times\text{س}\times\text{س}\times\cdots$ بعدد م

ومن بعد (بند ١٧) يوجد تفاضل $س^م = م\, س^{م-١}\, وس$

$- \dots + \dots\, وس + \dots$ بعدد م فيكون

$و\, س^م = م\, س^{م-١}\, وس$

٢٢ * وهذا القانون يتحقق على الأس الذي يكون اسه كسرا وسالبا ولبرهنة على ذلك نأخذ اولا $س^{\frac{م}{ن}}$ ونضع $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ثم

نرفع كلا من الطرفين الى ن فيوجد $ص^ن = س^م$ ونأخذ تفاضل

كل من الطرفين (بند ٢١) نجد $ن\, ص^{ن-١}\, وص = م\, س^{م-١}\, وس$

وينتج من ذلك $وص = \frac{م}{ن}\, \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}}\, وس$

واذا استعملنا هذه المعادلة عوض عن $س^{م-١}$ و $ص^{ن-١}$ كل من $\frac{س^م}{س}$ و $\frac{ص^ن}{ص}$

يكون $وص = \frac{م}{ن}\, \frac{\frac{س^م}{س}}{\frac{ص^ن}{ص}}\, وس$ ومنه $وص = \frac{م}{ن}\, \frac{س^م\, ص}{س\, ص^ن}\, وس$

وحيث ان $س^م = ص^ن$ فتؤول المعادلة السابقة الى

$وص = \frac{م}{ن}\, \frac{ص}{س}\, وس$ وبوضع مقدار ص بدلا عنه يوجد

$و\, س^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن}\, \frac{س^{\frac{م}{ن}}}{س}\, وس$ او $و\, س^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} \times س^{\frac{م}{ن}-١}\, وس$

وهذا ما اردنا ثبوته ولاجل اثبات الحالة التي يكون فيها الأس سالبا نفرض

$ص = س^{-م}$ وذلك يؤول الى $ص = \frac{١}{س^م}$ ثم نأخذ التفاضل بقاعدة

الكسور بناء على (بند ١١) نجد

و

وَصـ = سـ ق (١ ـ ١ ق) سـ

وبسبب كون سـ كمية تقصر توزن هذه له ل

وَصـ = ... ثم يعدل تعديل ... (بند ٢١)

فيكون وَصـ = ... وَسـ ولاجل تحصيل ... يلزم ...

يطرح أس كمية سـ التى فى المقسوم عليه من كمية سـ التى

فى المقسوم فيوجد وَصـ = ... وَسـ أو

وَصـ = ... وَسـ وهو موافق لقاعدة (بند ٢١)

وبه تم المراد

(تفاضل المتغيرة ذوات ...)

* ٢٣ * لايجاد تفاضل متغيرة ... يحول هذه المتغيرة الى ... كسرى وتجرى عليها قاعدة (بند ٢١) فلايجاد تفاضل كمية

$\sqrt{}$سـ مثلا نحولها الى سـ$^{\frac{1}{2}}$ وتفاضل هذه يكون

$$\frac{1}{2} \cdot سـ^{\frac{1}{2}-1} وَسـ = \frac{وَسـ}{2\sqrt{سـ}}$$

ويعلم من ذلك ... تفاضل ... كمية ... يلزم قسمة تفاضل

هذه الكمية على ضعف الجذر

(تنبيه) حيث انه يعرض م = ١ فى ...

وَ $\cdot$ سـ$^{\frac{1}{م}}$ = ... سـ$^{\frac{1}{م}-1}$ وَسـ المبينة فى (بند ٢٢) يوجد

وَ $\cdot$ سـ$^{\frac{1}{م}}$ = $\frac{1}{م}$ $\cdot$ سـ$^{\frac{1}{م}-1}$ وَسـ وذلك عبارة عن

$$\text{و}\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} = \text{و}\,\text{س}^{\frac{1}{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{1}{\text{ن}}-1}\,\text{وس} = \frac{\text{وس}}{\text{ن}\,\text{س}^{\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}}} = \frac{\text{وس}}{\text{ن}\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}-1}}}$$

يعلم من ذلك ان تفاضل المتغير المجذور الى درجة ما يساوى تفاضل المتغير مقسوما على درجة الجذر مضروبا فى الجذر بدرجته الاصلية لكن تكون الكمية الموضوعة تحت الجذر مرفوعة الى درجة الجذر ناقصة واحدا

* ٢٤ * قد تكون الدالة ص والمتغير س غير مبينين بمعادلة واحدة كما فى ص = د ع و ع = د س مثلا

والطريقة الاولى التى تتصور لايجاد المكرر التفاضلى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ تكون بحذف ع من بين هاتين المعادلتين حتى يمكن تطبيق قاعدة التفاضل واجرآؤها عليها الا انه يمكن ايجاد المكرر التفاضلى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ من اول وهلة بدون احتياج الى هذه العملية الاولية ولنشرع فى ذلك فنقول نفرض انه تغير س بكمية س + هـ فى معادلة ع = د س تتغير ع بكمية ع + ك ثم انه اذا وضعت ع + ك محل ع فى معادلة ص = د ع تصير دالة ص متغيرة بكمية صَ ويكون اذن

$$\text{عَ} = \text{د}\,(\text{س}+\text{هـ}) \quad \text{و} \quad \text{صَ} = \text{د}\,(\text{ع}+\text{ك})$$

ثم بعد ذلك يحل الطرفان الاخيران لهاتين المعادلتين ويفرض ان النواتج تكون مرتبة بحسب القوى التصاعدية فيحصل من ذلك

$$\text{عَ} = \text{ع} + \text{ل}\,\text{هـ} + \text{لَ}\,\text{هـ}^{2} + \text{لً}\,\text{هـ}^{3} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

$$\text{صَ} = \text{ص} + \text{ل}_{1}\,\text{ك} + \text{لَ}_{1}\,\text{ك}^{2} + \text{لً}_{1}\,\text{ك}^{3} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

ونجد من بعد تحويل كميتى ع و ص فى الاطراف الاول وقسمة الباقى على هـ و ك ان

$$\left.\begin{array}{l} [illegible] \\ [illegible] \end{array}\right\} \quad (١٠)$$

وبضرب [illegible]

[illegible] (١٠)

وحيث [illegible]

وبنىء على ذلك [illegible]

[illegible] وبوضع [illegible] المعادلة المذكورة الى

[illegible] (١١)

وحيث تنعدم ه تنعدم ك ينالان [illegible] ازدادت بقدر [illegible]
وصارت [illegible] ازدادت [illegible] كمية ه وصارت [illegible]
فبناء على ذلك تؤول معادلة (١١) في النهاية [illegible]

الى $\frac{و}{و} = ل_١ \times ل$ (١٢)

ولتعيين كميتي ل و ل١ ينبغي ان يفرض ان ه [illegible] و [illegible]
في معادلتي (١٠) فيوجد [illegible]

[illegible]

ثم بوضع [illegible] في معادلة (١٢)

فيوجد ان $[illegible] = [illegible] \times [illegible]$ (١٣)

وهذا الناتج يبين انه لايجاد [illegible] [illegible]

الصورة

$$\text{ص} = \text{د}\,\text{ع} \quad \text{و} \quad \text{ع} = \text{ء}\,\text{س}$$

يكفى ان تستخرج المكررات $\frac{\text{وص}}{\text{وع}}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وس}}$ التفاضلية من هاتين المعادلتين ثم تضرب النواتج فى بعضها وحاصل الضرب الحادث يكون هو مكرر $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ التفاضلى المطلوب

* ٢٥ * فاذا فرضنا مثلا ان $\text{ص} = ٣\,\text{ع}^{٢}$ و $\text{ع} = \text{س}^{٣} + \text{ح}\,\text{س}^{٢}$

فيحدث من ذلك $\frac{\text{وص}}{\text{وع}} = ٦\,\text{ع}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = ٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{ح}\,\text{س}$

وبضرب هذين المكررين فى بعضهما يكون

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٦\,\text{ع}\,(٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{ح}\,\text{س}) = ٦\,(\text{س}^{٣} + \text{ح}\,\text{س}^{٢})(٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{ح}\,\text{س})$$

* ٢٦ * قانون (١٣) يستعمل بكثرة فى أخذ تفاضل الكميات العسرة ولنمثل ببعض منها فنقول

نبحث عن ايجاد تفاضل $\text{ص} = \sqrt{\text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ فذلك يؤول الى ايجاد المكرر التفاضلى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ ولذا نضع $\text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢} = \text{ع}$ فيكون بناء عليه

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ع}} = \text{ع}^{\frac{١}{٢}}$$

ومعادلتا $\text{ص} = \text{د}\,\text{ع}$ و $\text{ع} = \text{ء}\,\text{س}$ (بند ٢٤) تؤولان حينئذ الى $\text{ص} = \text{ع}^{\frac{١}{٢}}$ و $\text{ع} = \text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢}$

فنأخذ تفاضل كل من طرفيهما (بند ٢١) يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وع}} = \frac{١}{٢}\,\text{ع}^{\overline{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{٢}\,(\text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\overline{\frac{١}{٢}}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وع}}{\text{وس}} = -\,٢\,\text{س}$$

وبضرب

وبضرب هذين المكررين التفاضليين في بعضهما يوجد

$$\frac{وَص}{وَس} = \ldots$$ وهنا يكون

$$وَص = \ldots$$

ويمكن ايضا ص = (ح + ء سَ) فلاجل ايجاد التفاضل نجعل

ح + ء سَ = ع فيحدث من ذلك معادلتا

ص = عَ و ع = ح + ء سَ وهنا يوجد

$$\frac{وَص}{وَع} = \ldots \quad \text{و} \quad \frac{وَع}{وَس} = م ء سَ$$

وبضرب هذين المكررين التفاضليين في بعضهما يوجد

$$\frac{وَص}{وَس} = م ء سَ (ح + ء سَ)$$ وبحذف المقام يكون

$$وَص = م ء سَ (ح + ء سَ) وَس$$

* ٢٧ * ولنمثل بمثال ثالث فنفرض ص = (ح - √(ء - سَ))

ثم نجعل ء - سَ = ع ......(١٤) فيكون

ص = (ح - √ع) ......(١٥)

وبأخذ تفاضل معادلة (١٤) يحدث وَع = ...

فلذلك $\frac{وَع}{وَس} = \ldots$ ويحدث بتفاضل معادلة (١٥)

$$وَص = ٤ (ح + √ع)^{٣} وَ (ح - √ع) = ٤ (ح + √ع)^{٣} \ldots$$

وباستبدال ع بمقدارها تؤول المعادلة الاخيرة الى

فا

$$\frac{\text{وَص}}{\text{وس}} = \frac{2\left(\text{ح} + \sqrt{\text{ء} - \frac{\text{هـ}}{\text{س}^2}}\right)^3}{\sqrt{\text{ء} - \frac{\text{هـ}}{\text{س}^2}}}$$ ثم يحدث بضرب هذين المكررين

في بعضهما $$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{ثـ}}{\text{س}^3}\,\frac{\left(\text{ح} + \sqrt{\text{ء} - \frac{\text{هـ}}{\text{س}^2}}\right)^2}{\sqrt{\text{ء} - \frac{\text{هـ}}{\text{س}^2}}}$$

واذا جريت عملية على هذا المثال $\text{ص} = \left(\text{ح} + \sqrt{\text{س}}\right)^3$

يوجد $$\frac{\text{وَص}}{\text{وس}} = \frac{3\left(\text{ح} + \sqrt{\text{س}}\right)^2}{2\sqrt{\text{س}}}$$

* ٢٨ * نثبت الآن أن تفاضل حاصل جمع جملة دوال لمتغير واحد يساوي دائما حاصل جمع تفاضلات هذه الدوال ولو أن ما تقدم يجعل ذلك في غاية الايضاح ولذا نفرض $\text{ص} = \text{ى}\,\text{س} + \text{د}\,\text{س} + \text{ء}\,\text{س}$ ونرمز بهذه الدوال متغير س بكمية $\text{س} + \text{هـ}$ ونفرض انه يوجد

$$\text{صَ} = \text{ى}\,\text{س} + \text{ح}\,\text{هـ} + \text{حَ}\,\text{هـ}^2 + \cdots \text{الخ} + \text{د}\,\text{س} + \text{و}\,\text{هـ} + \text{وَ}\,\text{هـ}^2$$
$$+ \cdots \text{الخ} + \text{ء}\,\text{س} + \text{ر}\,\text{هـ} + \text{رَ}\,\text{هـ}^2 + \cdots\cdots \text{الخ}$$

وبطرح المعادلة المفروضة من هذه المعادلة طرفا بطرف يحدث

$$\text{صَ} - \text{ص} = (\text{ح} + \text{و} + \text{ر})\,\text{هـ} + (\text{حَ} + \text{وَ} + \text{رَ})\,\text{هـ}^2 + \cdots \text{الخ}$$

وبأخذ النهاية نجد أن $$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ح} + \text{و} + \text{ر}$$

و $$\text{وص} = \text{ح}\,\text{وس} + \text{و}\,\text{وس} + \text{ر}\,\text{وس}$$

وحيث كانت كميات ح و و و ر هي الحدود المضروبة في القوة الاولى لـ هـ في حلول $\text{ى}(\text{س} + \text{هـ})$ و $\text{د}(\text{س} + \text{هـ})$ و $\text{ء}(\text{س} + \text{هـ})$ ينتج من ذلك أن $\text{ح}\,\text{وس}$ و $\text{و}\,\text{وس}$ و $\text{ر}\,\text{وس}$ تبين حاصل جمع تفاضلات الدوال المفروضة وهذا ما اردنا اثباته

* ٢٩ * ولنختم ما سبق بالتنبيه الآتي وذلك ان تفاضلات الدوال التي لا تخالف بعضها الا في كميات ثابتة كلها متحدة وهذه القضية بينة واضحة

لاننا

لانا اثبتنا فيما مر أن الكميات [illegible] تحصل [illegible] حيث
ص = [illegible] — [illegible] و [illegible] — [illegible] وهو
فى التفاضل اذ تفاضل كل منهما [illegible] ء س

(فى التفاضلات المتوالية)

٣٠ * التفاضلات [illegible]
هذه الدالة وتفاضل [illegible]
حتى [illegible] فى [illegible] ص [illegible] متغير
س مثلا ثم اخذنا تفاضل هذه الدالة [illegible] هذا التفاضل ح ء س ثم اخذ
تفاضل كمية ح اذ اشتملت على متغير س [illegible]
ح َ ءَ س [illegible] تفاضل كمية ح َ [illegible] متغير س
فان التفاضل [illegible] ء س [illegible]
تحتوى على متغير س فكميات ح ء س و ح َ ء س و ح ً ء س الخ
هى التى تسمى التفاضلات المتوالية للدالة ص [illegible]
الاول [illegible] التفاضل [illegible]

فاذا فرض ان ص = ح س³ فيحدث

ء ص = ٣ ح س² ء س

وهذا هو التفاضل الاول لكمية ص

[illegible] ح = ٣ ح س² [illegible]

ء ح = ٦ ح س ء س [illegible]

[illegible] ايضا ح َ = ٦ ح س [illegible] يحدث

ء ح َ = ٦ ح ء س [illegible]

[illegible] التفاضلات [illegible] فى هذا المثال الى [illegible] تفاضل كمية ٦ ح
الثابتة صفر

[illegible] الكميات التفاضلية التى هى ح و ح َ و ح ً .... الخ
[illegible] التفاضلات المتوالية تسمى المكررات التفاضلية المتوالية [illegible]

حدوث هذه المكررات باخذ التفاضلات المتوالية لكمية وَصـ باعتبار كمية وَسـ فيها ثابتة وبيان ذلك ان نقول حيث ان وَصـ = ح وَسـ وباخذ تفاضل كل من الطرفين باعتبار وَسـ ثابت يوجد

$\text{و}^2\text{صـ} = \text{و ح} \times \text{وسـ}$ وكان $\text{و ح} = \text{حَ وسـ}$ فيوجد

$\text{و}^2\text{صـ} = \text{حَ وسـ} \times \text{وسـ} = \text{حَ وسـ}^2$ ومنه يستخرج

$\frac{\text{و}^2\text{صـ}}{\text{وسـ}^2} = \text{حَ}$ وكذا باخذ تفاضل طرفي معادلة $\text{و}^2\text{صـ} = \text{حَ} \times \text{وسـ}^2$

باعتبار وسـ ثابتة يوجد $\text{و}^2\text{صـ} = \text{و حَ} \times \text{وسـ}^2$ وبسبب مساواة كمية و حَ الى حً وسـ يكون

$\text{و}^3\text{صـ} = \text{حً وسـ} \times \text{وسـ}^2 = \text{حً وسـ}^3$ ومنه يحدث

$\frac{\text{و}^3\text{صـ}}{\text{وسـ}^3} = \text{حً}$ وهلم جرا

(تنبيه) رموز و²صـ و و³صـ الخ تدل على التفاضل الثاني والثالث الخ لكمية صـ وذلك عبارة عن تفاضل التفاضل وتفاضل تفاضل التفاضل الخ

واما وسـ² و وسـ³ ...... الخ فتدل على تربيع او تكعيب الخ كمية وسـ

(في نظرية مكلوران)

* ٣١ * لتكن صـ دالة المتغير سـ فاذا رتبنا هذه الدالة بالنسبة للقوى التصاعدية لهذا المتغير وكان الناتج

$\text{صـ} = \text{ح} + \text{د سـ} + \text{و سـ}^2 + \text{ر سـ}^3 + \text{ع سـ}^4 + \text{الخ} \quad (١٦)$

ثم أخذنا التفاضلات المتوالية لهذه الدالة وجدنا بعد القسمة على وسـ

$\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}} = \text{د} + ٢\text{و سـ} + ٣\text{ر سـ}^2 + ٤\text{ع سـ}^3 + .. \text{الخ}$

و²

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}} = ٢\text{ر} + ٢ \times ٣\,\text{ﻫ}\,\text{س} + ٣ \times ٤\,\text{ع}\,\text{س}^{2} + \cdots \text{الخ}$$

$$\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{3}} = ٢ \times ٣\,\text{ﻫ} + ٢ \times ٣ \times ٤\,\text{ع}\,\text{س} + \cdots \text{الخ}$$

وإذا رمزنا بـ (ص) لما تؤول إليه ص حين يفرض فيها س = ٠

وبرمز $\left(\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\right)$ لما تؤول إليه كمية $\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}$ حين يفرض فيها س = ٠ وبرمز $\left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}\right)$ لما تؤول إليه كمية $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}$ حين يفرض فيها س = ٠ وهكذا

فالمعادلات السابقة تؤول إلى (ص) = ح و $\left(\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\right) = \text{د}$

و $\left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}\right) = ٢\text{ر}$ و $\left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{3}}\right) = ٢ \times ٣\,\text{ﻫ}$

ومنها يستخرج

$$\text{ح} = (\text{ص}) \text{ و } \text{د} = \left(\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\right) \text{ و } \text{ر} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}\right)$$

$$\text{و } \text{ﻫ} = \frac{1}{٢ \times ٣}\left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{3}}\right)$$

وبوضعنا هذه القيم في معادلة (١٦) فتؤول إلى

$$\text{ص} = (\text{ص}) + \left(\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\right)\text{س} + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}\right)\text{س}^{2} + \frac{1}{٢ \times ٣}\left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{3}}\right)\text{س}^{3} + \text{الخ} \cdots\cdots \quad (١٧)$$

وهذا هو قانون مكلورن ودستوره

(المثال الاول)

* ٣٢ * لحل كمية $\frac{1}{\text{ح}+\text{س}}$ بواسطة قانون مكلوران نضع
$\text{ص} = \frac{1}{\text{ح}+\text{س}}$ فنجد باخذ تفاضل الطرفين

$$\text{وص} = \frac{(\text{ح}+\text{س})\,\text{و}1 - 1\times \text{و}(\text{ح}+\text{س})}{(\text{ح}+\text{س})^{2}} = -\frac{\text{وس}}{(\text{ح}+\text{س})^{2}}$$

وبقسمة الطرفين على وس يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = -\frac{1}{(\text{ح}+\text{س})^{2}}$$

وباخذ التفاضل ثانيا وثالثا الخ يحدث من بعد القسمة على وس

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}} = \frac{2(\text{ح}+\text{س})}{(\text{ح}+\text{س})^{4}} = \frac{2}{(\text{ح}+\text{س})^{3}}$$

$$\text{و}\quad \frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{وس}^{3}} = -\frac{2\times 3(\text{ح}+\text{س})^{2}}{(\text{ح}+\text{س})^{6}} = -\frac{2\times 3}{(\text{ح}+\text{س})^{4}}$$

ثم نفرض $\text{س} = 0$ فى مقادير ص و $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}$ الخ

فيحدث $(\text{ص}) = \frac{1}{\text{ح}}$ و $\left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right) = -\frac{1}{\text{ح}^{2}}$ و $\left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}\right) = \frac{2}{\text{ح}^{3}}$

و $\left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{وس}^{3}}\right) = -\frac{2\times 3}{\text{ح}^{4}}$ الخ

ثم نضع هذه المقادير ومقدار ص الحادث بفرض $\text{س} = 0$ ايضا فى قانون (١٧) فيحدث لنا

$$\frac{1}{\text{ح}+\text{س}} = \frac{1}{\text{ح}} - \frac{\text{س}}{\text{ح}^{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{\text{ح}^{3}} - \frac{\text{س}^{3}}{\text{ح}^{4}} + \text{الخ}$$

(المثال الثانى)

* ٣٣ * $\text{ص} = \sqrt{\text{ح}^{2}+\text{ءس}}$ فنضع $\text{ص} = (\text{ح}^{2}+\text{ءس})^{\frac{1}{2}}$ ونجد
و

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{1}{2}\left(\text{ح}^2+\text{ءس}\right)^{-\frac{1}{2}}\text{ء} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ء}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{ءس}}}$$

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\text{ح}^2+\text{ءس}\right)^{-\frac{3}{2}}\text{ء}^2 = -\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\,\text{ء}^2}{\sqrt{\left(\text{ح}^2+\text{ءس}\right)^3}}$$

$$\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\left(\text{ح}^2+\text{ءس}\right)^{-\frac{5}{2}}\text{ء}^3 = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\,\text{ء}^3}{\sqrt{\left(\text{ح}^2+\text{ءس}\right)^5}}$$

واذا فرضنا ان $\text{س} = ٠$ تؤول هذه المقادير الى $\text{ص} = \left(\text{ح}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \text{ح}$

و $\left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ء}}{\text{ح}}$ و $\left(\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}\right) = -\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\,\text{ء}^2}{\text{ح}^3}$

و $\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\,\text{ء}^3}{\text{ح}^5}$ وبوضعها في قانون (١٧) يؤول هذا القانون الى

$$\sqrt{\text{ح}^2+\text{ءس}} = \text{ح} + \frac{\text{ءس}}{2\text{ح}} - \frac{\text{ء}^2\text{س}^2}{8\text{ح}^3} + \frac{\text{ء}^3\text{س}^3}{16\text{ح}^5} - \text{الخ}$$

(المثال الثالث)

* ٣٤ * ولنأخذ $\text{ص} = \left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}}$ مثلا ثالثا فنجد باجراء التفاضل

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{م}\left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}-1}$$

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = \text{م}\left(\text{م}-1\right)\left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}-2}$$

$$\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3} = \text{م}\left(\text{م}-1\right)\left(\text{م}-2\right)\left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}-3}$$

وبين $\text{س} = 0$ يؤول مقدار ص الى $\text{ح}^{\text{م}}$ يعني انه يوجد $(\text{ص}) = \text{ح}^{\text{م}}$
وتؤول التكرارات التفاضلية $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}}$ الخ الى

$$\left(\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\right) = \text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-1} \quad , \quad \left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}}\right) = \text{م}(\text{م}-1)\,\text{ح}^{\text{م}-2}$$

$$, \left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و س}^{3}}\right) = \text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\,\text{ح}^{\text{م}-3}$$ وتوضع هذه المقادير في

قانون (١٧) فيوجد

$$(\text{ح}+\text{س})^{\text{م}} = \text{ح}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-1}\text{س} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{2}\text{ح}^{\text{م}-2}\text{س}^{2}$$
$$+ \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{2.3}\text{ح}^{\text{م}-3}\text{س}^{3} + \text{الخ}$$

* (في تفاضل الكميات العالية) *

٣٥ * الكمية العالية هي التي تكون مرفوعة باس متغير ولوغاريتم وجيب وجيب تمام وما اشبه ذلك

٣٦ * ولنفرض اولا ان المراد ايجاد تفاضل هذه الكمية $\text{ح}^{\text{س}}$

ولذلك نضع $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ ثم نغير كمية س بكمية $\text{س} + \text{هـ}$. فتتغير كمية ص بكمية صَ وتؤول هذه المعادلة الى

$$\text{صَ} = \text{ح}^{\text{س}+\text{هـ}} \quad \text{أو} \quad \text{صَ} = \text{ح}^{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{هـ}}$$

ثم نحل كمية $\text{ح}^{\text{هـ}}$ بالنسبة لقوى هـ ولا يتيسر ذلك بقانون الكمية ذات الحدين الا بجعل $\text{ح} = 1 + \text{د}$ ومن ثم يكون

$$\text{ح}^{\text{هـ}} = (1+\text{د})^{\text{هـ}} = 1 + \text{هـ}\frac{\text{د}}{1} + \text{هـ}(\text{هـ}-1)\frac{\text{د}^{2}}{1\times 2}$$
$$+ \text{هـ}(\text{هـ}-1)(\text{هـ}-2)\frac{\text{د}^{3}}{1\times 2\times 3} + \text{الخ} \cdots (18)$$

وترتب

وترتب هذه بالنسبة الى هـ لكن بدون اجراء العملية لاننا لم نحتج الا للحدود المضروبة فى اول قوى هـ وبالتأمل يظهر انه اذا فرض حاصل بهذه الصورة هـ (هـ — ١) (هـ — ٢) (هـ — ٣) الخ بحيث يكون احد جزئيه (هـ — ١) (هـ — ٢) (هـ — ٣) الخ يتركب من مضاريب عدتها ن فحل هذا الجزء من بعد نظر المعادلات يكون هكذا

$$\text{هـ}^{\text{ن}} + \text{ا}\,\text{هـ}^{\text{ن}-١} + \text{ب}\,\text{هـ}^{\text{ن}-٢} \cdots + \text{م}\,\text{هـ} + \text{ن}_{١}$$

وحد $\text{ن}_{١}$ يكون مركبا من حاصل ضرب الاجزاء الثانية — ١ و — ٢ و — ٣ الخ لذوات الحدين هـ — ١ و هـ — ٢ و هـ — ٣ الخ ويكون لا محالة

$$\text{هـ}(\text{هـ}-١)(\text{هـ}-٢)(\text{هـ}-٣)\text{الخ} = \text{هـ}(\text{هـ}^{\text{ن}} + \text{ا}\,\text{هـ}^{\text{ن}-١} \cdots + \text{م}\,\text{هـ} + \text{ن}_{١})$$

ومن البين ان الحد المشتمل على هـ بدرجة اولى فى هذا الحاصل هو $\text{ن}_{١}$ هـ أو (— ١ × — ٢ × — ٣ و الخ) هـ بحكم ما تقرر ويؤخذ منه انه لايجاد الحدود المتبوعة بأول قوى هـ فى الحدود الصعبة فى حل (١٨) وهى من الحد الثالث فصاعدا تشكل مكررات هـ المختلفة بالوجه الآتى وهو أن مكرر هـ يتركب من حاصل ضرب الاعداد المجردة عن هـ فى $\frac{\text{ء}^{٢}}{١ \times ٢}$ للحد الثالث وفى $\frac{\text{ء}^{٣}}{١ \times ٢ \times ٣}$ للحد الرابع وهلم جرا وينبنى على ذلك ان $\text{ح}^{\text{هـ}} = ١ + (\text{ء} - \frac{\text{ء}^{٢}}{٢} + \frac{\text{ء}^{٣}}{٣} - \text{الخ})\,\text{هـ} +$ الحدود المحتوية على $\text{هـ}^{٢}$ و $\text{هـ}^{٣}$ الخ

واذا رمزنا بحرف ع لكمية $(\text{ء} - \frac{\text{ء}^{٢}}{٢} + \frac{\text{ء}^{٣}}{٣} - \frac{\text{ء}^{٤}}{٤} + \text{الخ})$ يحدث لنا

$$\text{ح}^{\text{هـ}} = ١ + \text{ع}\,\text{هـ} + \text{الحدود المحتوية على }\text{هـ}^{٢}\text{ و }\text{هـ}^{٣}\text{ و }\text{هـ}^{٤}\text{ الخ}$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة $\text{ص}' = \text{ح}^{\text{س}}\,\text{ح}^{\text{هـ}}$ آلت هذه المعادلة

الى $\text{صَ} = \text{ح}^{\text{س}} + \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}\,\text{هـ}$ + الحدود المحتوية على $\text{هـ}^{٢}$ وعلى $\text{هـ}^{٣}$ الخ

واذا طرحنا المعادلة الاولية التى هى $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ من هذه المعادلة يبقى

$\text{صَ} - \text{ص} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}\,\text{هـ}$ + الحدود المحتوية على $\text{هـ}^{٢}$ و $\text{هـ}^{٣}$ .. الخ

وبالارتقاء الى النهاية يوجد $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}$ وبوضع مقدار ص

عوضا عنها يوجد $\frac{\text{و}\,\text{ح}^{\text{س}}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}$ .... (١٩)

كمية ع الثابتة تتعلق بكمية ح لانه اذا وضعنا عوضا عن د مقدارها الذى هو $\text{ح} - ١$ فى معادلة

$$\text{ع} = \left(\text{د} - \frac{\text{د}^{٢}}{٢} + \frac{\text{د}^{٣}}{٣} - \frac{\text{د}^{٤}}{٤} + \cdots \text{الخ}\right)$$ حدث

$$\text{ع} = (\text{ح}-١) - \frac{(\text{ح}-١)^{٢}}{٢} + \frac{(\text{ح}-١)^{٣}}{٣} - \frac{(\text{ح}-١)^{٤}}{٤} + \text{الخ} \ldots (٢٠)$$

* ٣٧ * ولنشرع فى كيفية ايجاد مقدار آخر سهل لكمية ع الثابتة ولذلك نبحث عن حل كمية $\text{ح}^{\text{س}}$ بواسطة قضية مكلوران فيكون

$$\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$$

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}$$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = \text{ع}\frac{\text{و}\,\text{ح}^{\text{س}}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\frac{\text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}\,\text{وس}}{\text{وس}} = \text{ع}^{٢}\,\text{ح}^{\text{س}}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}} = \cdots\cdots\cdots = \text{ع}^{٣}\,\text{ح}^{\text{س}} \ \text{الخ}$$

وبجعل

وبجعل س = ٠ يوجد

$$(ص) = ء = ١$$

$$\left(\frac{وص}{وس}\right) = ح$$

$$\left(\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\right) = ح^{٢}$$

$$\left(\frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}}\right) = ح^{٣} \ldots\ldots \text{الخ}$$

وبوضع هذه المقادير في قانون (١٧) يوجد

$$ء^{س} = ١ + \frac{حس}{١} + \frac{ح^{٢}س^{٢}}{١.٢} + \frac{ح^{٣}س^{٣}}{١.٢.٣} + \ldots\ldots \text{الخ}$$

وحيث انه بأخذ متغير س اى مقدار كان لا يتغير مقدار ح الثابت فيمكننا ان نضع $س = \frac{١}{ح}$ وتؤول المعادلة لاخرى حينئذ في

$$ء^{\frac{١}{ح}} = ١ + \frac{١}{١} + \frac{١}{١.٢} + \frac{١}{١.٢.٣} + \ldots\ldots \text{الخ}$$

ثم نرمز للطرف الثانى من هذه المعادلة برمز هـ فتؤول الى

$ء^{\frac{١}{ح}} = هـ$ ويستخرج من ذلك $ء = هـ^{ح}$ وباخذ لوغ [illegible] من الطرفين يوجد

$$لوغ\ ء = لوغ\ هـ^{ح} = ح\ لوغ\ هـ$$ ومنه ينتج

$$ح = \frac{لوغ\ ء}{لوغ\ هـ} \ldots\ldots (٢١)$$

وعدد هـ المعلوم مقداره بمعادلة $هـ = ١ + ١ + \frac{١}{١.٢} + \ldots$ الخ هو الذى اتخذه نبير اساسا لحساب جدول لوغارتمات المسماة باللوغارتمات الطبيعية أو الزائدية وقد يتحقق باعشرة حدود لاول من

متسلسلة $١ + ١ + \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{١\times٢\times٣} + \cdots\cdots$ الخ

ويوجد حينئذ هـ = ٢٫٧١٨٢٨١٨ تقريبا واذا رمزنا برمز

لو ح للوغاريتم ح في الجملة الطبيعية او الزائدية نجد $ح = (٢٫٧١٨٢٨١٨)^{\text{لو ح}}$

واختصارا $ح = هـ^{\text{لو ح}}$ واذن $\text{لوغا } ح = \text{لوغا } هـ^{\text{لو ح}}$ و $\text{لوغا } ح = \text{لو ح لوغا } هـ$

ويستخرج من ذلك $\frac{\text{لوغا } ح}{\text{لوغا } هـ} = \text{لو ح}$ وبهذا تؤول معادلة (٢١) الى

$ع = \text{لو ح}$ ومن ثم يستخرج من معادلة (١٩)

$$و ح^{س} = ح^{س}\ و س \cdot \text{لو ح} \cdots\cdots \quad (٢٢)$$

(في التفاضلات اللوغاريتمية)

* ٣٨ * لتكن س لوغاريتم لكمية ص في الجملة التي اساسها ح فيوجد $ص = ح^{س}$ وباخذ تفاضل الطرفين (بند ٣٦) يحدث

$و ص = ع\ ح^{س}\ و س$ ومنه يستخرج

$$و س = \frac{و ص}{ع\ ح^{س}} = \frac{و ص}{\frac{\text{لوغا } ح}{\text{لوغا } هـ} \times ح^{س}}$$

وبضرب كيفي الكسر الكلي في لوغا هـ يوجد

$$و س = \frac{و ص}{ح^{س}} \cdot \frac{\text{لوغا } هـ}{\text{لوغا } ح}$$

وبما ان $ح^{س} = ص$ وكانت $س = \text{لوغا } ص$

تؤول المعادلة السابقة الى $و \cdot \text{لوغا } ص = \frac{و ص}{ص} \cdot \frac{\text{لوغا } هـ}{\text{لوغا } ح}$

وفي الحالة التي تؤخذ فيها اللوغاريتمات من جملة نبير يكون $ح = هـ$

ويوجد $\frac{\text{لوغا } هـ}{\text{لوغا } ح} = \frac{\text{لوغا } هـ}{\text{لوغا } هـ} = ١$ واذن يكون $و \cdot \text{لوغا } ص = \frac{و ص}{ص}$

هذا

هـ بالنسبة للوغاريتم الطبيعي اي الذي اساسه هـ

اما اذا كان هذا الاساس عددا آخر كان ح مثلا فانه يوجد

$$\text{لوغ ح} = ١ \text{ ، ويكون } ى \text{ لوص} = \frac{ى \text{ ص}}{\text{ص}} \text{ لوغ هـ}$$

في تفاضل الجيوب وجيوب التمام وكذا باقي الخطوط المثلثية

التي تدخل الدوال القوسية

* ٣٩ * القوس اكبر من جيبه واصغر من ظله ابدا ولاثبات ذلك نفرض قوس اب (شكل ٢) فجيب هذا القوس يكون سو وظله يكون ىا ثم ناخذ قوس اى = اب = بى يكون خطا مستقيما [illegible] وان يكون نصف هذا المستقيم وهو الجيب سو اصغر من نصف هذا المنحنى وهو با اعني قوس الجيب واما اثبات كون الظل اكبر من قوسه فهو انه تقرر حيث ان مثلث ىدع اكبر من قطاع باع يوجد ىا × $\frac{1}{2}$ اع > قوس با × $\frac{1}{2}$ اع وباسقاط $\frac{1}{2}$ اع من الطرفين يوجد [illegible] قوس با وبتنصيف الطرفين يوجد ىا > قوس با وهو ما اردنا اثباته

* ٤٠ * ويتضح مما سبق ان نهاية نسبة الجيب الى قوسه واحد لانه متى يكون قوس اب صفرا ينطبق الجيب على الظل فينطبق الجيب على القوس من باب اولى وبعلم ذلك نه يوجد النهاية

$$\frac{\text{جا ا}}{\text{قوس ا}} = ١$$

وبالرمز بحرف هـ للقوس اب يكون

$$\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}} = ١$$

* ٤١ * ولايجاد تفاضل الجيب الذي قوسه س نفرض ان هذا القوس يزداد زيادة قدرها هـ فيحدث بواسطة حساب المثلثات

$$\text{جا (س + هـ)} = \text{جاس جتاهـ} + \text{جاهـ جتاس} \quad \cdots (٢٣)$$

وبطرح جاس يعني حالة الجيب الاولى من كل من طرفي هذه المعادلة

ثم بقسمة على الزيادة هـ للمتغير يوجد

$$\frac{\text{جا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{جاس}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاس جتاهـ}+\text{جاهـ جتاس}-\text{جاس}}{\text{هـ}}$$

ثم بأخذ جاس مضروبا مشتركا فى الطرف الثانى للمعادلة الاخيرة يوجد

$$\frac{\text{جا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{جاس}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاس}(\text{جتاهـ}-1)}{\text{هـ}} + \frac{\text{جاهـ جتاس}}{\text{هـ}} \quad (٢٤)$$

ومتى تصير هـ صفرا تنعدم جتاهـ − ١ ويؤول $\frac{\text{جتاهـ}-1}{\text{هـ}}$ الى $\frac{0}{0}$ والاصلح حينئذ أن يوضع هذا الحد بصورة اخرى ولذلك يستخرج من معادلة جتا²هـ + جا²هـ = ١

$$\text{جتا}^2\text{هـ} - 1 = -\text{جا}^2\text{هـ} \quad \text{أو} \quad (\text{جتاهـ} - 1)(\text{جتاهـ} + 1) = -\text{جا}^2\text{هـ}$$

ومنه يستخرج $\text{جتاهـ} - 1 = -\frac{\text{جا}^2\text{هـ}}{\text{جتاهـ}+1}$

فنضع هذا المقدار فى معادلة (٢٤) فتؤول تلك المعادلة الى

$$\frac{\text{جا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{جاس}}{\text{هـ}} = -\text{جاس}\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}+1}\cdot\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}} + \text{جتاس}\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}} \quad (٢٥)$$

وحين يفرض هـ = ٠ يوجد $\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}} = 1$ و $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}+1} = \frac{0}{2} = 0$

ومعادلة (٢٥) تؤول بهذا السبب الى $\frac{\text{ڤ جاس}}{\text{ڤس}} = \text{جتاس}$

ويستخرج منه ڤ جاس = جتاس ڤس وهو المطلوب

* ٤٢ * هذا اذا كان نصف قطر ابا دول مساويا للواحد فاذا لم يكن كذلك بان كان نق مثلا فنستعمل عوضا عن معادلة (٢٣) هذه المعادلة

$$\text{جا}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{\text{جاس جتاهـ}+\text{جتاس جاهـ}}{\text{نق}}$$

ومن ثم يلزم ابقاء ثابتة نق فى الناتج السابق ويوجد

$\text{ڤ جاس} = \frac{\text{ڤس جتاس}}{\text{نق}}$ لتفاضل جيب القوس الذى نصف قطره نق

* ٤٣ * ويمكن ايجاد تفاضل جاس بواسطة الاعتبارات الهندسية لانه اذا رمزنا بحرف س لقوس اب (شكل ٣) وبحرف هـ لقوس بم كان عمود بع هو جاس وعمود مك هو

جا

جا (س + هـ) هذا وتماقل قوس هـ كبرت زوية م ح الى ان تصير قائمة حين يصير قوس هـ [illegible] من [illegible] انه يمكن اعتبار زاوية م ح [illegible] مشابها لمثلث [illegible] [illegible] وهذه النهاية وتحدث اذن هذه النسبة [illegible] أو ق : جتاس :: [illegible] جا (س + هـ) — جاس ومنها يستخرج جاس [illegible] = [illegible] وفي النهاية يمكن تغيير وتر م ح بقوسه الذى هو م ح = هـ فاذا اعتبرنا ذلك تؤول المعادلة السابقة الى

$$\frac{\text{ق جاس}}{\text{ق س}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{ق}} \quad \text{و}$$

ق جاس = $\frac{\text{جتاس ق س}}{\text{ق}}$ وباعتبار نصف القطر واحدا يكون

ق جاس = جتاس ق س

* ٤٤ * ولاجل تفاضل جيب [illegible] [illegible] تفاضل معادلة جا٢س + جتا٢س = ١ [illegible]

(جاس)٢ + (جتاس)٢ = ١ [illegible] (٣١) [illegible]

٢ جاس ق جاس + ٢ جتاس ق جتاس = [illegible]

[illegible] ق جتاس = [illegible]

ق جتاس [illegible] ق [illegible] (٤٤) [illegible]

[illegible] ق جتاس = — [illegible]

* ٤٥ * ولاجل تفاضل [illegible] ظاس [illegible] ثم نأخذ تفاضلها (بند ١٩) فيجد

$$\text{ق ظاس} = \frac{\text{جتاس} \times \text{ق جاس} - \text{جاس} \times \text{ق جتاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

ونضع عوضا عن و·جاس و و·جتاس مقدير جتاس وس و − جاس وس فيحدث من ذلك

$$\text{و·ظاس} = \frac{(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})\,\text{وس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

واذن يكون $\text{و·ظاس} = \frac{\text{وس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ لأن $\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س} = ١$

* ٤٦ * يعرف من حساب المثلثات ان نصف القطر وسط متناسب بين الظل وظل التمام وبين جيب التمام والقاطع ومن ثمة كان

$\text{ظتاس} = \frac{١}{\text{ظاس}}$ و $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$ فاذا اخذ تفاضل الاولى (بند ١٩) حدث

$$\text{و·ظتاس} = -\frac{\text{و·ظاس}}{\text{ظا}^2\text{س}} = -\frac{\text{وس}}{\text{جتا}^2\text{س ظا}^2\text{س}} = -\frac{\text{وس}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

لانه يستخرج من معادلة $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}} = \text{ظا}$ أن $\text{جتا ظا} = \text{جا}$

* ٤٧ * واذا اخذ تفاضل المعادلة الثانية التي هي $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$

حدث $$\text{و·قاس} = -\frac{\text{و·جتاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{\text{جاس وس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\frac{١}{\text{جتاس}}\,\text{وس} = \text{ظاس قاس وس}$$

* ٤٨ * ولايجاد تفاضل قاطع التمام نأخذ تفاضل معادلة

$\text{قتاس} = \frac{١}{\text{جاس}}$ فيوجد

$$\text{و·قتاس} = -\frac{\text{جتاس وس}}{\text{جا}^2\text{س}} = -\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\frac{١}{\text{جاس}}\,\text{وس}$$

$$= -\,\text{ظتاس قتاس وس}$$

* ٤٩ * واما لايجاد تفاضل الجيب المنكوس وهو جزء نصف القطر المحصور بين موقع الجيب والقوس فيكفي ان يؤخذ تفاضل هذه المعادلة

جا

جا منكوس س + جتاس = ١ فيحدث منذ ث

و· جا منكوس س + و· جتاس = ٠ أو

و· جا منكوس س − جاس وس = ٠ أو

و· جا منكوس س = جاس وس

(فى تفاضل بعض دوال عالية عسرة)

* ٥٠ * القواعد السابقة تكفى لمعرفة تفاضل اى دالة مرفوعة بكمية عالية لانه اذا فرضنا مثلا أن ص = $ح^{د^{س}}$ ووضعنا $د^{س}$ = ع وجدنا ص = $ح^{ع}$ وباخذ التفاضل (بند ٣٧) يكون

و ص = $ح^{ع}$ لوح و ع او

$\frac{\text{و ص}}{\text{و ع}}$ = $ح^{ع}$ لوح = $ح^{د^{س}}$ لوح

وكذا يوجد باخذ تفاضل طرفى معادلة $د^{س}$ = ع ان

و ع = $د^{س}$ لود وس أو

$\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}$ = $د^{س}$ لود واذن يكون (بند ٣٤)

$\frac{\text{و ص}}{\text{و ع}} \times \frac{\text{و ع}}{\text{و س}}$ او $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ = $ح^{د^{س}}$ $د^{س}$ لوح لود

* ٥١ * ليكن ايضا ص = $ع^{ر}$ (ع و ر كميات متغيرة) فنأخذ لوغاريتم كل من الطرفين فيحدث

لوغا ص = ر لوغا ع ثم نأخذ التفاضل فيحدث

و· لوغا ص = ر و· لوغا ع + لوغا ع و ر

ونضع عوضا عن التفاضلات اللوغارتمية مقاديرها (بند ٣٨) فيكون

$\frac{\text{وص}}{\text{ص}} = \text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع و ر}$ وبناء على ذلك يكون

$$\text{وص} = \text{ص}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع و ر}\right) = \text{ع}^{\text{ر}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع و ر}\right)$$

وبواسطة هذا التفاضل يوجد بالسهولة تفاضل $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ب}^{\text{س}}}$

(وكميات ع و ب و س كلها متغيرة) لانه اذا وضعنا $\text{ب}^{\text{س}} = \text{ر}$ التـ

المعادلة الى $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ر}}$

ومعادلتنا $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ر}}$ و $\text{ر} = \text{ب}^{\text{س}}$ الشبيهتان بالمعادلة المأخوذ تفاضلها انفا ينشأ عنهما

$$\text{وص} = \text{ع}^{\text{ر}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع و ر}\right)$$

$$\text{ور} = \text{ب}^{\text{س}}\left(\text{س}\,\frac{\text{وب}}{\text{ب}} + \text{لوغا ب و س}\right)$$

كما في المثال السابق في اول البند

واذا وضعنا في مقدار وص المبين بالمعادلة التي قبل الاخيرة عوضا عن ور و ر مقاديرها وجدنا

$$\text{وص} = \text{ع}^{\text{ب}^{\text{س}}}\left[\text{ب}^{\text{س}}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع}\,\text{ب}^{\text{س}}\left(\text{س}\,\frac{\text{وب}}{\text{ب}} + \text{لوغا ب و س}\right)\right]$$

$$= \text{ع}^{\text{ب}^{\text{س}}}\,\text{ب}^{\text{س}}\left(\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{س لوغا ع}\,\frac{\text{وب}}{\text{ب}} + \text{لوغا ع لوغا ب و س}\right)$$

(في قضية تيلور)

* ٥٢ * قبل التجوز ننبه ان الكمية التي كـكمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ في حساب التفاضل تدل على انه أخذ تفاضل دالة ص المتعلقة بمتغير واحد

او بجملة

أو بجملة متغيرات وهذا الاخذ كان بالنسبة الى متغير س ثم قسم الناتج على وس كما لو كان $\text{ص} = \text{ح}\,\text{س}^{٢}\,\text{ع}^{٣}\,\text{ر}^{٤}$ مثلا فان كمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ فيها توجد باخذ التفاضل بحسب س يعني باعتبار كميتي ع و ر ثابتتين ثم يقسم التفاضل على وس فيحدث من ذلك

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٢\ \text{ح}\ \text{ع}^{٣}\ \text{ر}^{٤}\ \text{س}$$ وكذا يوجد أن

$$\frac{\text{وص}}{\text{وع}} = ٣\ \text{ح}\ \text{س}^{٢}\ \text{ع}^{٢}\ \text{ر}^{٤} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وص}}{\text{ور}} = ٤\ \text{ح}\ \text{س}^{٢}\ \text{ع}^{٣}\ \text{ر}^{٣}$$

واذا فرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}$ فانه يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٢\text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وص}}{\text{وع}} = ٢\text{ع}$$

* ٥٣ * اذا غير متغير س بكمية $\text{س} + \text{هـ}$ في دالة بهذه الصورة $\text{ص} = \text{د}\,\text{س}$ ثم اخذ تفاضل طرفيها باعتبار كمية هـ ثابتة وكمية س متغيرة فأقول أن المكرر التفاضلي لها في هذه الحالة يساوي المكرر التفاضلي لها حين يؤخذ تفاضلها باعتبار كمية هـ متغيرة وكمية س ثابتة وبرهان ذلك هو أنه حيث كان بتغيير س بكمية $\text{س} + \text{هـ}$ يوجد

$\text{ص}' = \text{د}(\text{س} + \text{هـ})$ او

$\text{ص}' = \text{د}\,\text{س}'$ بفرض $\text{س} + \text{هـ} = \text{س}'$ فبأخذ تفاضل الطرفين يكون $\text{وص}' = \text{و}\cdot\text{د}\,\text{س}'$ لكن تفاضل دالة $\text{س}'$ يتركب من حاصل ضرب دالة اخرى الى $\text{س}'$ في $\text{و}\,\text{س}'$

فاذا فرض ان هذه الدالة تكون $\text{د}\,\text{س}'$ حدث من ذلك

$\text{وص}' = \text{د}\,\text{س}'\ \text{وس}'$ وبوضع $\text{س} + \text{هـ}$ عوضا عن $\text{س}'$ يكون

$\text{وص}' = \text{د}\,(\text{س} + \text{هـ})\ \text{و}\,(\text{س} + \text{هـ})$

ومن البين ان التغير الذي يتسبب من جعل س متغيرة و هـ ثابتة في هذا

الحاصل يخرج عن مضروب و (س + هـ) الذي يؤول في هذه الحالة الى و س في اصل ذلك يكون

$$\text{و صَ} = \text{ءَ}\,(\text{س} + \text{هـ})\ \text{و س}$$ ومنه يستخرج

$$\frac{\text{و صَ}}{\text{و س}} = \text{ءَ}\,(\text{س} + \text{هـ}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٢٦)$$

واما اذا كانت س هي الثابتة ركية هـ هي المتغيرة فان مضروب و (س + هـ) يؤول الى و هـ ويكون

$$\text{و صَ} = \text{ءَ}\,(\text{س} + \text{هـ})\ \text{و هـ}$$ ومنه ينتج

$$\frac{\text{و صَ}}{\text{و هـ}} = \text{ءَ}\,(\text{س} + \text{هـ}) \quad \cdots \quad (٢٧)$$

وبمساواة مقداري ءَ (س + هـ) ببعضهما يكون

$$\frac{\text{و صَ}}{\text{و س}} = \frac{\text{و صَ}}{\text{و هـ}}$$ وهو المطلوب بيانه واثباته

مثال ذلك $\text{ص} = \text{ح}\,\text{س}^{٣}$ فانه يحدث بوضع (س + هـ) محل س

$\text{صَ} = \text{ح}\,(\text{س} + \text{هـ})^{٣}$ وبأخذ التفاضل بفرض س متغيرة وعكسه يوجد

$$\frac{\text{و صَ}}{\text{و س}} = ٣\,\text{ح}\,(\text{س} + \text{هـ})^{٢} = \frac{\text{و صَ}}{\text{و هـ}} \quad \text{ومن ثم} \quad \frac{\text{و صَ}}{\text{و س}} = \frac{\text{و صَ}}{\text{و هـ}}$$

* ٥٤ * حيث انه بأخذ تفاضل معادلتي (٢٦) و (٢٧) بالنسبة الى س + هـ توجد ايضا نواتج متساوية

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{صَ}}{\text{و س}} = \text{ءً}\,(\text{س} + \text{هـ})\ \text{و}\,(\text{س} + \text{هـ})$$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{صَ}}{\text{و هـ}} = \text{ءً}\,(\text{س} + \text{هـ})\ \text{و}\,(\text{س} + \text{هـ})$$

فاذا جعلنا هـ ثابتة في الاولى و س ثابتة في الثانية يحدث

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \text{د}\,(\text{س}+\text{هـ})\ \text{و س}\quad \text{أو}\quad \frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \text{د}\,(\text{س}+\text{هـ})$$

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و هـ}} = \text{د}\,(\text{س}+\text{هـ})\ \text{و هـ}\quad \text{أو}\quad \frac{\text{و ص}}{\text{و هـ}} = \text{د}\,(\text{س}+\text{هـ})$$

وينتج من ذلك $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \frac{\text{و ص}}{\text{و هـ}}$

وبمثل هذا يثبت أن

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}} = \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و هـ}^{٢}}\ \text{و}\ \frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و س}^{٣}} = \frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و هـ}^{٣}}\quad \text{وهلم جرا}$$

* ٥٥ * [illegible] نحل هذه الدالة بالنسبة لقوى هـ ونرمز لها بما يأتي

$$\text{ص}' = \text{ص} + \text{ح هـ} + \text{ح}'\,\text{هـ}^{٢} + \text{ح}''\,\text{هـ}^{٣} + \text{ح}'''\,\text{هـ}^{٤} + \text{الخ} \quad (٢٨)$$

وكميات ص ، ح ، ح' ، ح'' .... الخ هي دوال للكمية س مجهولة الشكل [illegible] معادلة (٢٨) بالنسبة للمتغير هـ ونقسم الكل على و هـ فيوجد

$$\frac{\text{و ص}'}{\text{و هـ}} = \text{ح} + ٢\,\text{ح}'\,\text{هـ} + ٣\,\text{ح}''\,\text{هـ}^{٢} + ٤\,\text{ح}'''\,\text{هـ}^{٣} + \text{الخ}$$

ونفاضل [illegible] بالنسبة للمتغير س [illegible] فيوجد

$$\frac{\text{و ص}'}{\text{و س}} = \frac{\text{و ص}}{\text{و س}} + \frac{\text{و ح}}{\text{و س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و ح}'}{\text{و س}}\,\text{هـ}^{٢} + \text{الخ}$$

ولما كان الطرفان [illegible] (شكل ٥)

لزم أن يكون الطرفان [illegible] متساويين [illegible] تساوى فيه مكررات قوى هـ المتناظرة بحيث يكون

$$\text{ح}=\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\ \text{و}\ ٢\text{حَ}=\frac{\text{وح}}{\text{وس}}\ \text{و}\ ٣\text{حً}=\frac{\text{وحَ}}{\text{وس}}\ \text{و}\ ٤\text{حٌ}=\frac{\text{وحً}}{\text{وس}}\ \text{الخ او}$$

$$\text{ح}=\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\ \text{و}\ \text{حَ}=\frac{\text{وح}}{٢\,\text{وس}}\ \text{و}\ \text{حً}=\frac{\text{وحَ}}{٣\,\text{وس}}\ \text{و}\ \text{حٌ}=\frac{\text{وحً}}{٤\,\text{وس}}\ \text{الخ}$$

وبوضع مقدار ح الذى هو $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ المبين بالاولى من المعادلات الاخيرة فى المعادلة الثانية منها يوجد

$\text{حَ}=\frac{١}{١\times٢}\,\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ وبوضع هذا المقدار عوضا عن حَ فى المعادلة الثالثة التى هى $\text{حً}=\frac{\text{وحَ}}{٣\,\text{وس}}$ يحدث $\text{حً}=\frac{١}{١\times٢\times٣}\,\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}$

وهلم جرا ثم انه بواسطة مقادير ح و حَ و حً ..... الخ هذه تؤول معادلة (٢٨) الى

$$\text{صَ}=\text{ص}+\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{ه}+\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\,\frac{\text{ه}^{٣}}{١\times٢\times٣}+\text{الخ}$$

وبوضع مقدار صَ فى هذه يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه})=\text{ص}+\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{ه}+\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\,\frac{\text{ه}^{٣}}{١\times٢\times٣}+\text{الخ}$$

وهذا هو قانون تيلور ودستوره

* (تطبيق قانون تيلور على حل وتسلسل جملة دوال متنوعة) *

* ٥٦ * ليكن $\text{صَ}=\sqrt{\text{س}+\text{ه}}$ فيحدث منه

$\text{ص}=\sqrt{\text{س}}=\text{س}^{\frac{١}{٢}}$ واذن يكون

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}=\frac{١}{٢}\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}}=\frac{١}{٢}\,\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{و}$$

$\text{و}^{٢}$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}} = -\frac{١}{٤}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} = -\frac{١}{٤}\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٣}}} \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٣}} = \frac{٣}{٨}\text{س}^{-\frac{٥}{٢}} = \frac{٣}{٨}\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٥}}} \quad \text{الخ}$$

ثم توضع هذه المقادير في قانون تيلور فيوجد

$$\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} = \sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٢}\frac{\text{هـ}}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{١}{٨}\frac{\text{هـ}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٣}}} + \frac{١}{١٦}\frac{\text{هـ}^{٣}}{\sqrt{\text{س}^{٥}}} \quad \text{الخ}$$

* ٥٧ * ليكن $\text{صَ} = \text{جا}\ (\text{س}+\text{هـ})$ فينتج من ذلك أن

$\text{ص} = \text{جاس}$ وتتحصل المكررات التفاضلية متوالية هكذا

$$\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{س}} = \text{جتاس} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}} = -\text{جاس} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٣}} = -\text{جتاس}$$

$$\text{و} \quad \frac{\text{و}^{٤}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٤}} = \text{جاس} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٥}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٥}} = \text{جتاس} \quad \text{والخ}$$

وبوضع هذه في قانون تيلور يوجد

$$\text{جا}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{جاس} + \text{جتاس}\frac{\text{هـ}}{١} - \text{جاس}\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} - \text{جتاس}\frac{\text{هـ}^{٣}}{١\times٢\times٣}$$
$$+ \text{جاس}\frac{\text{هـ}^{٤}}{١\times٢\times٣\times٤} + \text{جتاس}\frac{\text{هـ}^{٥}}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} \quad \text{والخ}$$

وإذا فرضنا أن $\text{س} = ٠$ يكون $\text{جاس} = ٠$ و $\text{جتاس} = ١$

والناتج الأخير يؤول إلى

$$\text{جاهـ} = \text{هـ} - \frac{\text{هـ}^{٣}}{١\times٢\times٣} + \frac{\text{هـ}^{٥}}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} - \text{الخ}$$

وإذا أخذ $\text{صَ} = \text{جتا}\ (\text{س}+\text{هـ})$ وجدت بعد إجراء عمل مشابه للسابق أن

$$\text{جتاهـ} = ١ - \frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \frac{\text{هـ}^{٤}}{١\times٢\times٣\times٤} - \text{الخ}$$

* ٥٨ * نبحث أيضا عن حل لوغا $(\text{س}+\text{هـ})$ ولذلك نضع

$\text{صَ} = \text{لوغا}\ (\text{س}+\text{هـ})$ فيكون

$\text{ص} = \text{لوغا}\,\text{س}$ وباخذ التفاضل يحدث

$\text{وَص} = \text{وَ}.\,\text{لوغا}\,\text{س} = \frac{\text{وَس}}{\text{س}}$ ومنه ينتج

$\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ثم يوجد بالتفاضلات المتوالية

$\frac{\text{وَ}^{2}\text{ص}}{\text{وَس}^{2}} = -\frac{1}{\text{س}^{2}}$ و $\frac{\text{وَ}^{3}\text{ص}}{\text{وَس}^{3}} = \frac{2}{\text{س}^{3}}$ الخ

وبوضع هذه المقادير في قانون تيلور يوجد

$\text{لوغا}\,(\text{س}+\text{ه}) = \text{لوغا}\,\text{س} + \frac{\text{ه}}{\text{س}} - \frac{\text{ه}^{2}}{2\,\text{س}^{2}} + \frac{\text{ه}^{3}}{3\,\text{س}^{3}}$ الخ

* ٥٩ * يمكن بالسهولة ايجاد تفاضل اللوغاريتم بواسطة القانون الاخير اللوغاريتمي اذا فرض ان هذا القانون موجود بواسطة الجبر فقط كما هو مبين في المطبوعة الاولى في اخر هذا الكتاب وبالحقيقة فانه يحدث منه

$\frac{\text{لوغا}\,(\text{س}+\text{ه}) - \text{لوغا}\,\text{س}}{\text{ه}} = \frac{1}{\text{س}} - \frac{\text{ه}}{2\,\text{س}^{2}} + \frac{\text{ه}^{2}}{3\,\text{س}^{3}}$ الخ

وحين نرتقي الى النهاية نجد

$\frac{\text{وَ}.\,\text{لوغا}\,\text{س}}{\text{وَس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ومنه يحدث

$\text{وَ}.\,\text{لوغا}\,\text{س} = \frac{\text{وَس}}{\text{س}}$

وحيث انه قد علم تفاضل اللوغاريتم فيسهل من بعده ايجاد تفاضل $\text{ح}^{\text{س}}$ لانه بفرض $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ واخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من الطرفين يوجد

$\text{لوص} = \text{لوح}^{\text{س}} = \text{س}\,\text{لوح}$ وبأخذ التفاضل يحدث

$\frac{\text{وَص}}{\text{ص}} = \text{وَس}\,\text{لوح}$ وينتج من ذلك

$\text{وَص} = \text{ص}\,\text{وَس}\,\text{لوح}$ وبوضع $\text{ح}^{\text{س}}$ عوضا عن ص يكون

وَ.

$$\text{و}'\,\text{ح}^{\text{س}} = \text{ح}^{\text{س}}\,\text{و س لو ح}$$

• ٦٠ • يمكن استنتاج قانون مكلورن من قانون تيلور بالوجه الآتى وهو ان تجعل $\text{س} = ٠$ فى قانون تيلور الذى هو

$$\text{د(س+هـ)} = \text{د س} + \frac{\text{و}'\,\text{د س}}{\text{و س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}''\,\text{د س}}{\text{و س}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢}\ \text{الخ}$$

ونرمز بـ (د س) لما تؤول اليه د س حين يفرض فيها $\text{س} = ٠$

ونرمز $\left(\frac{\text{و}'\,\text{د س}}{\text{و س}}\right)$ لما تؤول اليه كمية $\frac{\text{و}'\,\text{د س}}{\text{و س}}$ حين يفرض فيها $\text{س} = ٠$ وهلم جرا نظرا لباقى المكررات التفاضلية فالقانون المذكور يؤول حينئذ الى

$$\text{د هـ} = (\text{د س}) + \left(\frac{\text{و}'\,\text{د س}}{\text{و س}}\right)\text{هـ} + \left(\frac{\text{و}''\,\text{د س}}{\text{و س}^{٢}}\right)\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}$$

و هـ فى هذه المعادلة تدخل فى د هـ كما تدخل س فى د س بحيث لو غيرت هـ بكمية س آلت د هـ الى د س وحيث لم يبق اثر الى س فى المعادلة الاخيرة فلا سبيل لعدم التغيير وبالحقيقة فلا فرق بين وضع اى حرف مكان هـ وبين هـ ومن ثم يوجد باجراء هذا التغيير

$$\text{د س} = (\text{د س}) + \left(\frac{\text{و}'\,\text{د س}}{\text{و س}}\right)\text{س} + \left(\frac{\text{و}''\,\text{د س}}{\text{و س}^{٢}}\right)\frac{\text{س}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}$$

وهذا هو قانون مكلورن

(فى تفاضل المعادلات التى بمتغيرين)

• ٦١ • لتكن $\text{ك(س،ص)} = ٠$ (٢٩)

معادلة بمتغيرين فصلها بالنسبة الى ص يوجد

$\text{ص} = \text{د س}$ واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة (٢٩) فتؤول الى

ى (س و دس) = ٠ أو الى

دس = ٠ اختصارا

وهذه المعادلة الاخيرة هي متطابقة وجميع حدودها يمحو بعضها بعضا باخذ س اى مقدار كان فاذا لم ترد هذه المعادلة عن الدرجة الثالثة مثلا امكن وضعها هكذا ع س^{٣} + ح س^{٢} + ب س + و = ٠

وحيث انها لا تزال متحققة باخذ متغير س اى مقدار كان فتتحقق بوضع س + ه فيها عوضا عن س ويوجد حينئذ

ع (س+ه)^{٣} + ح (س+ه)^{٢} + ب (س+ه) + و = ٠

ويعلم من ذلك انه متى كان دس = ٠ فلا بد وان يكون

د (س+ه) = ٠ ايضا مهما كانت كمية س هذا واذا طرحت من هذه المعادلة معادلة دس = ٠ بقي

د (س+ه) − دس = ٠ أو

$\frac{\text{د(س+ه)} - \text{دس}}{\text{ه}}$ = ٠

ولكن د (س+ه) = دس + ع ه + ح ه^{٢} + ب ه^{٣} + الخ

فيستخرج منه $\frac{\text{د(س+ه)} - \text{دس}}{\text{ه}}$ = ع + ح ه + ب ه^{٢} + الخ

وحيث كان الطرف الاول لهذه المعادلة صفرا فيكون

ع + ح ه + ب ه^{٢} + ... الخ = ٠ كذلك وبالارتقاء الى النهاية يكون

$\frac{\text{و̇ دس}}{\text{و س}}$ = ع = ٠ وبحذف المقام يوجد

و̇ دس = ع و س = ٠ وبابتداء ص يوجد

و̇ ى (س و ص) = ع و س = ٠

ويعلم من ذلك انه اذا اخذ تفاضل معادلة ى (س و ص) = ٠ باعتبار كمية ص فيها دالة المتغير س امكن مساواة الناتج بصفر ويستعين بذلك

يدلك على ايجاد مقدار معامل $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ التفاضلى كما ستراه فى المثال الآتى

وهو ان نفرض ان د (س و ص) $= \text{س}^{٢} + ٣\,\text{د ص} - \text{ص}^{٢} = ٠$ (٣٠)

فاذا اخذنا التفاضل بالطريقة المعتادة [illegible] حسب ما تقدم برهانه نجد

$$٢\,\text{س وس} + ٣\,\text{د وص} - ٢\,\text{ص وص} = ٠ \quad (٣١)$$

ومنها يحدث $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{٢\text{س}}{٢\text{ص} - ٣\text{د}}$ ..... (٣٢)

* ٦٣ * لمطابقة الطريقة التى استعملت لايجاد هذا المقدار مع الطريقة التى استعملناها من اول الامر الى الآن نفرض انه يلزم [illegible] بالطريقة الاولى اى نضع معادلة (٣٠) بهذه الصورة

$$\text{ص} = \text{د س}$$

يعنى انه ينبغى حلها بالنسبة الى ص ليستخرج منها بواسطة التفاضل مقدار $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ فبسلوك هذه الطريقة نجد اولا

$\text{ص} = \frac{٣\text{د}}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{س}^{٢}}$ ثم نجد بواسطة التفاضل

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \pm \frac{\text{س}}{\sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{س}^{٢}}}$$

ومقدار $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ هذا متباين بصورة للحالة التى فى معادلة (٣٢)

لكن اذا وضع مقدار ص المستخرج من (٣٠) فى معادلة (٣٢) يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \pm \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{س}^{٢}}} = \pm \frac{\text{س}}{\sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{س}^{٢}}}$$

وهو كالمبين قبل ومعادلة (٣١) هى التفاضل الاول لمعادلة (٣٠)

ولايجاد المعادلة التي يعلم بها المكرر التفاضلي بدرجة ثانية يعني $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}$

تقسم حدود معادلة (٣١) على وس ونجعل $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ع}$

فتؤول هذه المعادلة الى $\text{٢ س} + \text{٣ د ع} - \text{٢ ص ع} = \text{٠}$

واذا اعتبرنا فيها بعد ذلك كميتي ص و ع كدالتين لمتغير س نجد بواسطة التفاضل

$$\text{٢ وس} + \text{٣ د وع} - \text{٢ ص وع} - \text{٢ ع وص} = \text{٠}$$

وبالقسمة على وس ووضع ع عوضا عن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ يوجد

$$\text{٢} + \text{٣ د}\,\frac{\text{وع}}{\text{وس}} - \text{٢ ص}\,\frac{\text{وع}}{\text{وس}} - \text{٢ ع}^2 = \text{٠}$$ ومنها

يستخرج $\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = \frac{\text{٢ ع}^2 - \text{٢}}{\text{٣ د} - \text{٢ ص}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{٣٣})$

الا ان حيث ان $\text{ع} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ يستخرج منه $\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$

وبوضع هذه المقادير في معادلة (٣٣) عوضا عن ع و $\frac{\text{وع}}{\text{وس}}$

يوجد بعد حذف المقام

$$\text{و}^2\text{ص}\,(\text{٣ د} - \text{٢ ص}) = \text{٢ وص}^2 - \text{٢ وس}^2 \quad \cdots\cdots \quad (\text{٣٤})$$

وهذا هو التفاضل الثاني لمعادلة (٣٠) ولاجل ايجاد التفاضل الثالث

نجعل $\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = \text{ع}'$ فتؤول معادلة (٣٣) بعد حذف مقامها الى

$$\text{٣ د ع}' - \text{٢ ص ع}' = \text{٢ ع}^2 - \text{٢}$$

ثم نعتبر كميات ص و ع و ع' كدوال لمتغير س ويؤخذ

التفاضل

التفاضل وتكمل العملية كما في ايجاد تفاضل شرفي فيحدث تفاضل الثالث وهلم جرا

* ٦٣ * ويعرض لنا استعمال حروف ب و ء و ع و خ لاجل هذه العمليات نأخذ تفاضل معادلة (١١) ونضع فيها وص بدلا عن تفاضل ص و و²ص بدلا عن تفاضل وص و و³ص بدلا عن تفاضل و²ص وهكذا باعتبار وس كمية ثابتة فيتدى الى ناتج كالسابق ويوجد بهذه الكيفية

$$\text{٢وس}^2 + \text{٣ءو}^2\text{ص} - \text{٢وص}^2 - \text{٢صو}^2\text{ص} = ٠$$

وهذه المعادلة هي كمعادلة (٣٤)

* ٦٤ * ولنبحث الآن عن المقدار العمومي لتفاضل معادلة

$$\text{د(س، ص)} = ٠$$

ولذلك نرمز لكمية د(س، ص) بحرف ع فنجد باخذ تفاضل هذه الدالة بالنسبة الى متغير س هذا الحد $\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{وس}$ ونجد ايضا باخذ تفاضلها بالنسبة الى متغير ص هذا الحد الثاني $\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{وص}$ ويكون حينئذ و.د(س، ص) أو

$$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{وس} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{وص}$$

وان كانت ص معتبرة دالة لمتغير س فانه يوجد باخذ تفاضلها $\text{وص} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{وس}$ وبوضع هذا المقدار في كمية وع يكون

$$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{وس} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{وس}$$

* ٦٥ * واذا راجعت القضية المثبوتة في (بند ٤٢) شاهدت ان

كمية ع معتبرة كدالة لمتغير ص و ص معتبرة كدالة لمتغير س وحاصل ضرب $\frac{\text{وع}}{\text{وص}} \; \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ ليس الا تفاضل ع الماخوذ بنسبة س الداخلة في ص

* ٦٦ * لما كان التفاضل الكلى لدالة محتوية على س و ص يعلم بمعادلة

$$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{وس} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{وص}$$

سميت كميات $\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{وس}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{وص}$ بالتفاضلات الجزئية للدالة ع

وكذلك اذا كانت ع دالة لمتغيرات س و ص و ر الثلاث التى ليست بعلاقة فانه يوجد

$$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{وس} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{وص} + \frac{\text{وع}}{\text{ور}}\,\text{ور}$$

والحدود $\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{وس}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{وص}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{ور}}\,\text{ور}$

تكون هى التفاضلات الجزئية للدالة ع

* ٦٧ * قد ذكرنا في (بند ٥٢) ان كمية التى ككمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ تبين انه اخذ تفاضل دالة ص بالنسبة لمتغير س وقسم الناتج بعد ذلك على وس فينتج من ذلك انه اذا وجدت معادلة $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ح}$

و يستخرج منها $1 = \frac{\text{ح}}{\frac{\text{وص}}{\text{وس}}}$

فلا يمكن ان يستنتج منها $1 = \text{ح}\,\frac{\text{وس}}{\text{وص}}$ بدون برهان لان التفاضل

في المعادلة الاخيرة لم يكن ماخوذا بالنسبة الى س بل هو ماخوذ بالنسبة الى ص ولا يعرف هل التفاضل في الحالة الاخيرة كالتفاضل في الحالة الاولى اولا ولرفع هذا الاشكال نقول انه قد ثبت في (بند ٢٤) ان

$$\frac{\text{و ع}}{\text{و س}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\,\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$$

فاذا فرضنا ان $\text{ع} = \text{س}$ تتحول هذه المعادلة الى

$$1 = \frac{\text{و س}}{\text{و ص}}\,\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} \quad \text{ومنه يحدث} \quad \frac{\text{و س}}{\text{و ص}} = \frac{1}{\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}}$$

وهذا يبين ان تغيير فرضية التفاضل تتوافق مع الجبر وقواعده

* ٦٨ * ولنثبت القضية المتقدمة من اول وهلة باثبات آخر فنقول ليكن

$$\frac{\text{ص}' - \text{ص}}{\text{س}' - \text{س}} = \text{ع} + \text{ب هـ} + \text{ح هـ}^2 + \text{د هـ}^3 + \text{الخ}$$

فيحدث منه

$$\frac{\text{س}' - \text{س}}{\text{ص}' - \text{ص}} = \frac{1}{\text{ع} + \text{ب هـ} + \text{ح هـ}^2 + \text{د هـ}^3 + \text{الخ}}$$

وباجراء عملية القسمة على الطرف الثاني او بحله بواسطة قانون مكلورن يوجد

$$\frac{\text{س}' - \text{س}}{\text{ص}' - \text{ص}} = \frac{1}{\text{ع}} - \frac{\text{ب}}{\text{ع}^2}\,\text{هـ} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

وفي النهاية يوجد $\frac{\text{و س}}{\text{و ص}} = \frac{1}{\text{ع}}$ وحيث ان $\text{ع} = \frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$

ينتج ان $\frac{\text{و س}}{\text{و ص}} = \frac{1}{\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}}$ وهو المطلوب

* (في [illegible] المماسات) *

* ٦٩ * الطريقة التي يوجد بها مقدار المماس وتحت المماس والخط العمودي وتحت العمودي تسمى بطريقة المماسات ولكن لايجاد ذلك [illegible] س و ص بعدا نقطة م المأخوذة من نقطة منحنى ([illegible])

فنزيد الافقى اح = س كمية حَ حَ = هـ ونرسم الرأسى حَ مَ
وغرر بنقطتى م و مَ قاطع مَ ع فمن البين انه كلما نقص ح حَ
مال خط ح ع الى الانطباق على تحت المماس ح ط ولا يزال كذلك الى
ان ينعدم ح حَ = هـ فيؤول ح ع الى تحت المماس ح ط
فى النهاية ويعلم من ذلك ان ح ط هو النهاية او الحد الذى يميل نحوه ح ع
ولنبحث الآن عن المقدار الجبرى لخط ح ع ليستخرج منه نهايته ولذلك
ننظر انه يحدث من تشابه مثلثى مَ م ك و م ع ح هذا التناسب

$$\text{مَك} : \text{مك} :: \text{مح} : \text{حع} \quad \text{أو}$$

$$\text{مَك} : \text{هـ} :: \text{ص} : \text{حع} \quad \text{ومنه يستخرج}$$

$$\text{حع} = \frac{\text{هـص}}{\text{مَك}} \quad \text{ولتعيين مَك نضع}$$

$$\text{مَك} = \text{مَحَ} - \text{مح} \quad \text{لكن} \quad \text{مَحَ} = \text{صَ} = \text{د}(\text{س} + \text{هـ}) \quad \text{فيكون}$$

$$\text{مَحَ} = \text{ص} + \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \cdots \text{الخ}$$

وغير ذلك $\text{مح} = \text{ص}$ فاذا طرحنا هاتين المعادلتين من بعضهما فيوجد

$$\text{مَحَ} - \text{مح} \quad \text{أو} \quad \text{مَك} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى مقدار ح ع عوضا عن مَ ك نجد أن

$$\text{حع} = \frac{\text{هـص}}{\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \cdots\cdots \text{الخ}}$$

وبقسمة البسط والمقام على هـ يكون

$$\text{حع} = \frac{\text{ص}}{\frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}}{١\times٢} + \cdots\cdots \text{الخ}}$$

وحيث انه يوجد فى النهاية هـ = ٠ و ح ع يتغير بخط ح ط

فيستخرج

فيستخرج من المعادلة الاخيرة

$$\text{ح ط} = \frac{\text{ص}}{\frac{\text{وص}}{\text{وس}}}$$ وذلك بموجب (بند ٦٧) يكون

$$\text{حط} = \text{ص}\,\frac{\text{وس}}{\text{وص}}$$ أو بعبارة أوفى

$$\text{حط} = \text{صَ}\,\frac{\text{وسَ}}{\text{وصَ}}$$ = تحت المماس بالرمز بحرفي سَ و صَ

لبعدي نقطة م

* ٧٠ * اذا رسمنا من نقطة م (شكل ٥) خط م ع عمودا على م ط فتحت العمودي يكون ح ع ولتعيينه نعتبر تناسب

$$\text{حط} : \text{حم} :: \text{حم} : \text{حع}$$ أو

$$\text{صَ}\,\frac{\text{وسَ}}{\text{وصَ}} : \text{صَ} :: \text{صَ} : \text{حع}$$ فيحدث منه

$$\text{حع} = \text{صَ}\,\frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}}$$ = تحت العمودي

واما من قبل الخط المماس والخط العمودي فنعتبر معادلتي

$$\text{مط} = \sqrt{\text{حط}^2 + \text{حم}^2}$$ و

$$\text{مع} = \sqrt{\text{حع}^2 + \text{حم}^2}$$

فيحدث من الاولى

$$\text{مط} = \sqrt{\text{صَ}^2 \times \frac{\text{وسَ}^2}{\text{وصَ}^2} + \text{صَ}^2} = \text{صَ}\sqrt{\frac{\text{وسَ}^2}{\text{وصَ}^2} + 1}$$ = المماس

ويحدث من الثانية

$$\text{مع} = \sqrt{\text{صَ}^2 \times \frac{\text{وصَ}^2}{\text{وسَ}^2} + \text{صَ}^2} = \text{صَ}\sqrt{\frac{\text{وصَ}^2}{\text{وسَ}^2} + 1}$$ = العمودي

٭ ٧١ ٭ ولايجاد معادلة الخط المماس نفرض ان سَ و صَ يكونان ابعاد نقطة التماس اعنى م فمعادلة مستقيم مار بنقطة م يمكن بيانها برسم صـ — صَ = حـ (سـ — سَ) وكمية حـ فى هذه المعادلة تمثل ظل زاوية م ط ح ومقدار هذا الظل هو $\frac{\text{ح م}}{\text{ح ط}}$ لانه يحدث من تناسب [illegible]

$$\text{ظا م ط ح} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

ويتضح من بعد ذلك ان

$$\text{ظا م ط ح} = \frac{\text{ح م}}{\text{ح ط}} = \frac{\text{صَ}}{\text{تحت المماس}} = \frac{\text{صَ}}{\text{صَ}\,\frac{\text{واسَ}}{\text{واصَ}}} = \frac{\text{واصَ}}{\text{واسَ}}$$

فاذا وضعنا مقدار حـ هذا فى معادلة الخط المماس تؤول تلك المعادلة الى

$$\text{صـ} - \text{صَ} = \frac{\text{واصَ}}{\text{واسَ}}\,(\text{سـ} - \text{سَ})$$ وهى معادلة الخط المماس المطلوبة

ومعادلة الخط العمودى تكون حينئذ

$$\text{صـ} - \text{صَ} = -\frac{\text{واسَ}}{\text{واصَ}}\,(\text{سـ} - \text{سَ})$$

٭ (تطبيق القوانين او الدساتير السابقة على الامثلة) ٭

٭ (المثال الاول) ٭

٭ ٧٢ ٭ المراد ايجاد تحت المماس للقطع المكافى ولذلك نأخذ تفاضل طرفى معادلة القطع المكافى التى هى $\text{صَ}^2 = \text{ع سَ}$ بحسب نقطة التماس فيوجد ٢ صَ واصَ = ع واسَ ومنه يحدث

$$\frac{\text{واصَ}}{\text{واسَ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢صَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واسَ}}{\text{واصَ}} = \frac{\text{٢صَ}}{\text{ع}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة

$$\text{ح ط} = \text{س} \frac{\text{وق}}{\text{وس}} \quad \text{فيوجد}$$

$$\text{ط} = \frac{\text{٢ س}}{\text{ب}}$$

واذا وضعت في المعادلة الاخيرة ح س عوضا عن س حينئذ

$$\text{ب ط وتحت المماس} = \text{٢ س}$$

(مثال ثاني)

المراد ايجاد تحت العمودي لقطع الناقص ولذلك نتبع طريقة تفاضل معادلة قطع الناقص التي هي $\text{ق}^2 \text{ص}^2 + \text{م}^2 \text{س}^2 = \text{م}^2 \text{ق}^2$ فبجعل المعادلة تفاضلية مرة نجد $\text{٢ ق}^2 \text{ص وص} + \text{٢ م}^2 \text{س وس} = ٠$ ويستخرج من ذلك $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = -\frac{\text{م}^2 \text{س}}{\text{ق}^2 \text{ص}}$ ثم نضع هذا المقدار في تحت العمودي

حيث فيكون ح ط وتحت العمودي $= -\frac{\text{م}^2 \text{س}}{\text{ق}^2}$

(مثال الثالث)

المراد ايجاد ادكية الخط المماس للدائرة ولذلك نأخذ تفاضل معادلة الدائرة التي هي $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2$ بحسب نقطة التماس فيوجد

$$\text{٢ س وس} + \text{٢ ص وص} = ٠ \quad \text{ومنه يحدث}$$

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وس}}{\text{وص}} = -\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

ثم يوضع هذا المقدار في معادلة

$$\text{م ط} = \text{ص} \sqrt{\frac{\text{وس}^2}{\text{وص}^2} + ١} \quad \text{فتؤول تلك المعادلة الى}$$

$$\text{م ط} = \text{ص} \sqrt{\frac{\text{س}^2}{\text{ص}^2} + ١} = \text{ص} \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{س}^2}{\text{س}^2}} = \frac{\text{ص نق}}{\text{س}} = \text{المماس}$$

(في الخطوط المجانبة للخطوط المنحنية ويقال لها المقاربة)

* ٧٣ * مقدار اط (شكل ٦) الذى هو بعد راس المنحنى عن نقطة تقابل الخط المماس بالخط الافقى يستخرج بالسهولة من معادلة الخط المماس لانه اذا جعلت رأس المنحنى التى هى ا نقطه اصلية كان خط اط هو بعد هذه الرأس عن النقطة التى يكون فيها الراسى م ح صفرا وحيث ان معادلة المماس م ط هى $ص - ص' = \frac{وص'}{وس'} (س - س')$

فيكفى ان يجعل فى هذه المعادلة $ص = ٠$ ليكون مقدار س الحادث منها مقدارا لخط اط ويوجد اذ ذاك

اط $= س = س' - ص' \frac{وس'}{وص'}$ وهذا المقدار يكون هو بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الافقى ولايجاد بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الرأسى نبحث عن مقدار اب بان نقول انه لما كان هذا الخط هو الرأسى الموافق الى $س = ٠$ فى معادلة الخط المماس فيجب وضع $س = ٠$ حينئذ فى هذه المعادلة ليحدث منها $ص =$ اب $= ص' - \frac{وص'}{وس'} س'$

ونفرض الآن ان س تصير غير منتهية وابعاد اط و اب لاتزال منتهية المقدار محدودة فخط ط ل (شكل ٧) لا يقطع المنحنى حينئذ الا على بعد غير محدود فهو الخط المقربى للمنحنى المفروض

* ٧٤ * ولنمثل بهذه المعادلة $ص^٢ = م س + ه س^٢$

فنستخرج منها $\frac{وص'}{وس'} = \frac{م + ٢ ه س'}{٢ ص'}$ واذن يكون

$$\text{اط} = س' - \frac{٢ ص'^٢}{م + ٢ ه س'} = \frac{م س' + ٢ ه س'^٢ - ٢ ص'^٢}{م + ٢ ه س'} = - \frac{م س'}{م + ٢ ه س'}$$

$$\text{اب} = ص' - \frac{م س' + ٢ ه س'^٢}{٢ ص'} = \frac{٢ ص'^٢ - م س' - ٢ ه س'^٢}{٢ ص'}$$

وبوضع

وبوضع مقدار ص عوضا عنه يوجد بعد الاختصار

ط = ... وحين تقسم

كمياتها ... يوجد

ط = ...

ثم يجعل س = ∞ ف هذه المقادير تكون

ط = ... و اب = ... (٣٥)

ويعلم من ذلك انه يوجد للمنحنى المفروض مقربات متى لم تكن كمية ... صفرا اوسالبة لانه حين تكون كمية ... سالبة تصير مقادير اب ... معادلات (٣٥) تخيليا ومن البين انه متى ... سالبة انسبت المعادلة الى قطع ناقص وتكون المعادلة بعينها معادلة قطع مكافئ متى كان مقدار ... صفرا وفي هذه الحالة تبين من معادلات (٣٥) ان اط و اب يصيران غير متعينين ويؤخذ منه ان القطع المكافئ لا مقربات له ولا تجانب

في معادلة المستوى المماس بسطح منحن ومعادلة
الخط العمودى لهذا السطح

* ٧٥ * لتكن د (س و ص و ع) = ٠ معادلة سطح منحن و ع س + ط ص + ع + ... = ٠ معادلة مستو ذى ... س و ص و ع ... نقطة المماس التي هي ... معادلة المستوى ... في هذه النقطة تكون

ع س + ط ص + ع + ... = ٠

وبحذف ... من بين هاتين المعادلتين توجد المعادلة

ع (س − سَ) + ط (ص − صَ) + (ع − عَ) = ٠ (٣٦)

وهى معادلة المستوى المار بنقطة سَ و صَ و عَ ولرسم مستويا موازيا للمستوى (س و ع) مارا بنقطة التماس سَ و صَ و عَ

فهذا المستوى يقطع السطح المنحنى المفروض فى منحنى م ح (شكل ٨) ويقطع المستوى المماس فى مستقيم م ل والمستقيم م ل يكون مماسا للمنحنى م ح والا لقطع السطح المماس السطح المنحنى

ويمكن استنتاج معادلة مستقيم م ل من معادلة (٣٦) لانه حيث كان هذا المستقيم وهو تقاطع المستوى المماس بالمستوى المار بنقطة التماس موازيا لسطح (س و ع) الاحداثى وكانت نقطة م توجد عليه فيوجد اذ ذاك بجميع نقطه ص = صَ أو ص − صَ = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى ع (س − سَ) + ح (ع − عَ) = ٠

ولما كانت هذه المعادلة تبين النسب الواقعة بين بعدى س و ع لاية نقطة من مستقيم م ل تكون هى معادلة هذا المستقيم ويمكن وضعها هكذا

ع − عَ = − ع/ح (س − سَ) .... (٣٧)

هذا واذا امعنت النظر ظهر لك ان معادلة السطح المنحنى المفروض التى هى د(س و ص و ع) = ٠ تؤول الى معادلة منحنى م ح اذا اعتبرت فيها ص ثابتة فاذا أردنا الآن معرفة شرط تماس مستقيم م ل بمنحنى م ح نراجع (بند ٧١) ومنه نتحقق انه يجب ان يكون مكرر كمية (س − سَ) من معادلة (٣٧) مساويا لمقدار وا عَ / وا سَ المستخرج من معادلة المنحنى م ح ولا يخفى ان معادلة هذا المنحنى هى معادلة السطح معتبرا فيها ص ثابتة ومن ثم يكفى ان يؤخذ تفاضل معادلة السطح المذكور ويستخرج منها وا ع / وا س لانه يعلم من بعد (بند ٥٢) ان الرمز وا ع / وا س يبين أن ص اعتبرت ثابتة فى اخذ التفاضل وينتج من ذلك انه بتشكيل س و ص هكذا سَ و صَ بعد اجراء العملية يكون شرط تماس م ل بالمنحنى م ح هكذا

$$-\frac{\text{ح}}{\text{ى}}=\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{س}'}\quad \text{أو}\quad \text{ح}=-\text{ى}\,\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{س}'}\quad\cdots\ (٣٨)$$

واذا رسمنا كذلك من نقطة م مستويا موازيا لمستوى (ص و ع) الاحداثى فيقطع هذا المستوى السطح المفروض فى منحنى م ى ويقطع المستوى المماس فى مستقيم م ق ويكون هذا المستقيم مماسا للمنحنى م ى وجميع نقطه تكون متساوية البعد عن مستوى (ص و ع) يعنى تكون افقياتها كلها متساوية فيكون س = سَ أو س ـ سَ = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى المعادلة

ط (ص ـ صَ) + ى (ع ـ عَ) = ٠ التى يستخرج منها

ع ـ عَ = ـ $\frac{\text{ط}}{\text{ى}}$ (ص ـ صَ) وهذه المعادلة هى معادلة المستقيم م ق فيكون شرط تماس هذا المستقيم بالمنحنى م ى بمساواة مكتركية ص ـ صَ للكثر $\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{ص}'}$ التفاضلى المستخرج من

معادلة السطح المفروض يعنى انه يوجد ـ $\frac{\text{ط}}{\text{ى}}=\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{ص}'}$ ومن ثم

يكون ط = ـ ى $\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{ص}'}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (٣٩)

واذا وضعت مقادير ح و ط المبينة بمعادلتى (٣٨) و (٣٩) فى معادلة (٣٦) الت هذه المعادلة الى

$$-\text{ى}\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{س}'}(\text{س}-\text{س}')-\text{ى}\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{ص}'}(\text{ص}-\text{ص}')+\text{ى}(\text{ع}-\text{ع}')=٠$$

ومن هذه يستخرج

$$\text{ع}-\text{ع}'=\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{س}'}(\text{س}-\text{س}')+\frac{\text{و}\text{ع}'}{\text{و}\text{ص}'}(\text{ص}-\text{ص}')\quad(٤٠)$$

وهذه المعادلة هى معادلة المستوى المماس فى نقطة سَ و صَ و عَ

* ٧٦ * ولنبحث عن معادلة المستوى المماس بالكرة مثلا ولذلك
نرمز لاحداثيات مركزها بحروف ه و و و ر فمعادلتها تكون

$$(\text{س} - \text{ه})^{٢} + (\text{ص} - \text{و})^{٢} + (\text{ع} - \text{ر})^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

ثم نعتبر ص ثابتة في هذه المعادلة ونأخذ التفاضل فيوجد

$$٢(\text{س} - \text{ه})\,\text{وس} + ٢(\text{ع} - \text{ر})\,\text{وع} = ٠$$ ومنه يحدث

$$\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = \frac{\text{ه} - \text{س}}{\text{ع} - \text{ر}}$$ وكذا نعتبر س ثابتة ونأخذ تفاضل معادلة
الكرة المذكورة فيوجد

$$٢(\text{ص} - \text{و})\,\text{وص} + ٢(\text{ع} - \text{ر})\,\text{وع} = ٠$$ ومنه يحدث

$$\frac{\text{وع}}{\text{وص}} = \frac{\text{و} - \text{ص}}{\text{ع} - \text{ر}}$$ ومعادلة السطح المماس للكرة في نقطة
سَ و صَ و عَ تكون حينئذ

$$\text{ع} - \text{عَ} = \frac{\text{ه} - \text{سَ}}{\text{عَ} - \text{ر}}(\text{س} - \text{سَ}) + \frac{\text{و} - \text{صَ}}{\text{عَ} - \text{ر}}(\text{ص} - \text{صَ})$$

* ٧٧ * واذا كان هذا السطح يمر بنهاية القطر الرأسي يوجد
$\text{سَ} = \text{ه}$ و $\text{صَ} = \text{و}$ و $\text{عَ} = \text{ر} + \text{نق}$ وتؤول
معادلة السطح في هذه الحالة الى $\text{ع} = \text{ر} + \text{نق}$ وهذه هي معادلة
المستوى الموازي لسطح (س و ص) الاحداثي

* ٧٨ * معادلات الخط العمودي في نقطة سَ و صَ و عَ .
يمكن حدوثها بالسهولة من معادلة السطح المماس وبيان ذلك ان نقول حيث انه
يعلم من الهندسة التحليلية المسماة بالثلاثة ابعاد أن الشرط الواقع ليكون
المستقيم الذي معادلتاه

$$\left.\begin{aligned} \text{س} &= \text{ح}\,\text{ع} + \text{ء} \\ \text{ص} &= \text{ح}_{١}\,\text{ع} + \text{ء}_{١} \end{aligned}\right\} \quad (٤١)$$

عمودا على المستوى الذي معادلته

(٢٠)

ويلزم من ذلك ان يكون

فاذا وضعنا هذه القيم ... (١٠) يوجد

ومن ... (...) فتحقق هذه المعادلات لانها من جهة فقط فمستقيم المستدل عليه بما يوجد ايضا

(ب — ٤)

(ع — ٤)

وهاتان المعادلتان هما معادلتا الخط العمودي في نقطة (سَ و صَ و عَ)

* (في الدوال التي تؤول الى ÷ باحد المقادير التي ياخذها المتغير) *

* ٧٩ * اذا ال كسر ككسر $\frac{\text{ى س}}{\text{ء س}}$ الى ÷ باخذ متغير س مقدارا يرمز اليه بحرف ح مثلا كان ذلك دليلا على وجود مضروب مشترك هو س ـ ح أو $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}}$ على جهة العموم لكميتي الكسر المفروض واذا اسقط هذا المضروب المشترك امكن حدث المقدار الحقيقي للكسر المفروض

ولنفرض لبيان ذلك ان س ـ ح يكون مضروبا في ى س م مرة وفي ء س ن مرة (مالم يقتضي الحال الى جعل م و ن مساويين الى الوحدة او الى صفر) فيمكننا ان نضع

$$\text{ى س} = \text{ع}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}} \quad \text{و} \quad \text{ء س} = \text{ك}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}}$$

ومنه يحدث $\frac{\text{ى س}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ع}}{\text{ك}}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م} - \text{ن}}$ .... (٤٣)

وباخذ تفاضل المعادلة الاولى وقسمة جميع حدودها بعد ذلك على وس يوجد

$$\frac{\text{و}\cdot\text{ى س}}{\text{و س}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و س}}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}} + \text{م ع}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م} - 1} \quad ..$$

ومن المشاهد ان مقدار $\frac{\text{و}\cdot\text{ى س}}{\text{و س}}$ يتركب من حدين يحتوي احدهما على مضروب س ـ ح بأس اصغر من أسه في الدالة المفروضة بواحد واذا اخذ المكرر التفاضلي لكمية $\frac{\text{و}\cdot\text{ى س}}{\text{و س}}$ شوهد بهذا المنوال انه يحتوي على حد متبوع بكمية $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}}$ وحد اخر متبوع بكمية $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م} - 1}$

وحد

وحدّ ثالث متبوع بكمية $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-٢}$ وهذا الحدّ الثالث يكون

$\text{م}\,(\text{م} - ١)\ \text{ع}\ (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-٢}$ وبواسطة ... التفاضل يشاهد أن
كل تفاضل مستجد يحتوي على كمية س ـ ح بأس كاسمها
في الذي قبله ... حدث منها ... التفاضل بلا واسطة ... حدّ يحتوي على
س ـ ح بأس أصغر من ذلك بواحد ويعلم منه ... التفاضلية
الموالية يكون الحدّ المحتوي على أقل قوى س ـ ح هو

$\text{م}\ \text{ع}\ (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-١}$ .... في التفاضل الاول

و $\text{م}\,(\text{م} - ١)\ \text{ع}\ (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-٢}$ ...... في التفاضل الثاني

و $\text{م}\,(\text{م} - ١)\,(\text{م} - ٢)\ \text{ع}\ (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-٣}$ في التفاضل الثالث

و $\text{م}\,(\text{م} - ١)\,(\text{م} - ٢)\cdots\text{ع}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-\text{ن}}$ في التفاضل النوني

وإذن يكون المكرر التفاضلي بدرجة ن لكمية ى س هكذا

$$\frac{\text{و}^{\text{ن}}\,\text{ى س}}{\text{و س}^{\text{ن}}} = \text{س}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}} + \text{س}'\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-١} + \text{س}''\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-٢} + \cdots + \text{م}\,(\text{م} - ١)\,(\text{م} - ٢)\cdots\text{ع}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-\text{ن}}$$

وما ذكر في شأن ى س يمكن تطبيقه على د س فيحدث منها

$$\frac{\text{و}^{\text{ن}}\,\text{د س}}{\text{و س}^{\text{ن}}} = \text{ع}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}} + \text{ع}'\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-١} \cdots + \text{ن}\,(\text{ن} - ١)\cdots(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ن}}$$

وبقسمة هذين المكررين على بعضهما يوجد

$$\frac{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}\,\text{ى س}}{\text{و س}^{\text{ن}}}}{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}\,\text{د س}}{\text{و س}^{\text{ن}}}} = \frac{\text{س}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}} + \text{س}'\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-١} \cdots\cdots + \text{م}\,(\text{م} - ١)\cdots\cdots\text{ع}}{\text{ع}\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}} + \text{ع}'\,(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-١} \cdots\cdots + \text{ن}\,(\text{ن} - ١)\cdots\cdots\text{ك}}$$

* ٨٠ * وهنا تعتبر ثلاث حالات وهى $\text{م} = \text{ن}$ و $\text{م} > \text{ن}$ و $\text{م} < \text{ن}$

ففى الحالة الاولى وهى $\text{م} = \text{ن}$ يؤول كل من كميتى $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-\text{ر}}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$ الى $(\text{س} - \text{ح})^{\cdot}$ اى الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المأخوذة وهو ر مساويا م وتؤول كميات $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{[illegible]}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{[illegible]}$ ...... الخ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-١}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-٢}$ ... الخ الى صفر بفرض $\text{س} = \text{ح}$ ويعلم من ذلك ان جميع حدود البسط والمقام تحذف ماعدا الحد الاخير من كل منهما ومعادلة (٤٤) تؤول حينئذ الى

$$\frac{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}.\,\text{ك}\,\text{س}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{ن}}}}{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}.\,\text{د}\,\text{س}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{ن}}}} = \frac{\text{م}\,(\text{م}-١)\,(\text{م}-٢)\cdots\text{ع}}{\text{ن}\,(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)\cdots\text{ك}} = \frac{\text{ع}}{\text{ك}} = \frac{\text{ك}\,\text{س}}{\text{د}\,\text{س}}$$

وفى الحالة الثانية وهى التى يكون فيها $\text{م} > \text{ن}$ تؤول كمية $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$ الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المجراة وهو ر مساويا الى ن وتكون أسس $\text{ن} - ١$ و $\text{ن} - ٢$ و $\text{ن} - ٣$ ... الخ و $\text{م} - ١$ و $\text{م} - ٢$ و $\text{م} - ٣$ ... الخ للكميات ذات الحدين الاخيرة اكبر من $\text{ن} - \text{ر}$ فهى موجبة ويعلم من ذلك ان جميع هذه الكميات تؤول الى صفر بفرض $\text{س} = \text{ح}$ فتحذف جميع الحدود المحتوية عليها حينئذ وتؤول معادلة (٤٤) الى

$$\frac{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}.\,\text{ك}\,\text{س}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{ن}}}}{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}.\,\text{د}\,\text{س}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{ن}}}} = \frac{\text{م}\,(\text{م}-١)\,(\text{م}-٢)\cdots\text{ك}\,(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}-\text{ن}}}{\text{ن}\,(\text{ن}-١)\cdots\text{ك}} = ٠$$

وبهذا

وبهذا يستدل على ان معادلة (٤٣) تؤول الى صفر حين يكون م > ن
واما الحالة الثالثة وهى الأخيرة التى فيها م < ن فان جميع الحدود
تحذف فيما عدا حد م (م ـ ١) (م ـ ٢) ... ح (س ـ ح)
بأخذ عدد التفاضلات الذى هو ر مساويا الى م ويبقى حينئذ

$$\frac{\frac{و^{م}\,ص}{و\,س^{م}}}{\frac{و^{م}\,ط}{و\,س^{م}}} = \frac{م(م-١)(م-٢)\ldots\ldots ح}{٠} = \infty$$

وهذا المقدار يدل على ان الطرف الثانى لمعادلة (٤٣) يصير غير منته
فى الحالة التى يكون فيها م < ن

* ٨١ * وتنتج هذه القاعدة مما سبق وهى متى يراد تعيين المقدار الحقيق لكسر $\frac{ص}{ط}$ الذى يصير $\frac{٠}{٠}$ باحد المقادير التى يأخذها المتغير يؤخذ تفاضل كل من كميتى هذا الكسر على حدته ثم ينظر هل يؤول ناتجا $\frac{و\,ص}{و\,س}$ و $\frac{و\,ط}{و\,س}$ الى صفر بالمقدار الذى يجعل $\frac{ص}{ط}$ آيلا الى $\frac{٠}{٠}$ اولا فان لا الى صفر اخذ الكسر التفاضلى اعنى الكمية $\frac{و\,ص}{و\,س}$ و $\frac{و\,ط}{و\,س}$ وينظر ايضا هل يؤول كل من النواتج الحادثة الى صفر بالفرض المذكور اولا وهكذا تدام العملية فان وجد بعد جملة عمليات ناتجان لا يؤول كل منهما الى صفر بالفرض السابق فالكسر المتكون منهما يكون هو المقدار الحقيقى للكسر المفروض واذا آل احدهما وهو البسط الى صفر فالمقدار الحقيقى للكسر المفروض يكون صفرا ويكون مقدار هذا الكسر غير محدود اذا

ال المقام وحده الى صفر

(المثال الاوّل)

* ٨٢ * المراد معرفة المقدار الحقيق لكسر $\frac{\text{س}^{3}-\text{ح}^{3}}{4(\text{س}-\text{ح})}$ الذى يؤول الى $\frac{0}{0}$ بفرض $\text{س} = \text{ح}$ ولذلك نأخذ تفاضل كل من كميتى هذا الكسر فيوجد $\frac{3\text{س}^{2}}{4}$ وحيث ان كميتى هذا الكسر الاخير لا يؤولان الى صفر بفرض $\text{س} = \text{ح}$ فالمقدار الحقيق لكسر $\frac{\text{س}^{3}-\text{ح}^{3}}{4(\text{س}-\text{ح})}$ حين يفرض $\text{س} = \text{ح}$ يكون $\frac{3\text{ح}^{2}}{4}$ وهو المطلوب

(المثال الثانى)

* ٨٣ * لمعرفة المقدار الحقيق لكسر $\frac{\text{س}^{3}-3\text{س}+2}{\text{س}^{4}-6\text{س}^{2}+8\text{س}-3}$ حين يفرض $\text{س} = 1$ الذى يجعل هذا الكسر ايلا الى $\frac{0}{0}$ يؤخذ تفاضل البسط والمقام كل منهما على حدته ثم تقسم النواتج على بعضها فيوجد $\frac{3\text{س}^{2}-3}{4\text{س}^{3}-12\text{س}+8}$ وحيث ان كلا من كميتى هذا الكسر الاخير يؤول الى صفر بالفرض السابق الذى هو $\text{س} = 1$ فيؤخذ التفاضل ثانيا فيحدث

$$\frac{6\text{س}}{12\text{س}^{2}-12}$$

ولما كان مقام هذا الكسر يؤول وحده الى صفر بفرض $\text{س} = 1$ علم من ذلك ان مقدار الكسر المفروض غير محدود

(المثال الثالث)

* ٨٤ * يفرض كسر $\frac{\text{ح}^{\text{س}}-\text{ء}^{\text{س}}}{\text{س}}$ الذى يؤول الى $\frac{0}{0}$ بفرض $\text{س} = 0$ فيؤخذ تفاضل كل من البسط والمقام على حدته فيؤول هذا الكسر الى

$$\frac{\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{ح}-\text{ء}^{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{ء}}{1}$$

وهو كسر يؤول الى $\text{لو}\,\text{ح} - \text{لو}\,\text{ء}$ ولا تؤول كميتاه الى صفر بجعل

س

$\text{س} = 0$ فيعلم من ذلك ان المقدار الحقيقي للكسر المفروض حين يفرض $\text{س} = 0$ هو لو ح ـــ لو ء وكمية $\text{س} - 0$ أو س تكون هي المضروب المشترك بين حدّي ذلك الكسر ولاظهار هذا المضروب في البسط الذي هو $\text{ح}^{\text{س}} - \text{ء}^{\text{س}}$ ننظر انه يوجد من بند (٣٧) ان

$$\text{ح}^{\text{س}} = 1 + \frac{\text{ع س}}{1} + \frac{\text{ع}^2\text{س}^2}{1\times2} + \frac{\text{ع}^3\text{س}^3}{1\times2\times3} + \cdots \text{الخ}$$

$$\text{و}\quad \text{ء}^{\text{س}} = 1 + \frac{\text{ع}'\text{س}}{1} + \frac{\text{ع}'^2\text{س}^2}{1\times2} + \frac{\text{ع}'^3\text{س}^3}{1\times2\times3} + \cdots \text{الخ}$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$\text{ح}^{\text{س}} - \text{ء}^{\text{س}} = (\text{ع} - \text{ع}')\text{س} + \frac{(\text{ع}^2 - \text{ع}'^2)\text{س}^2}{1\times2} + \frac{(\text{ع}^3 - \text{ع}'^3)\text{س}^3}{1\times2\times3} + \text{الخ}$$

وبهذا يشاهد وجود مضروب س في $\text{ح}^{\text{س}} - \text{ء}^{\text{س}}$

* ٨٥ * حيث ان القاعدة التي ذكرناها لايجاد المقدار الحقيقي للكسر الذي يؤول الى $\frac{0}{0}$ باحد المقادير التي يأخذها المتغير مؤسسة على فرضية م و ن عددين صحيحين فلا يمكن استعمالها في الحالات التي تكون فيها هاتان الكميتان كسورا اذ لا يمكن الوقوف على حد كحد $\text{س} - \text{ح}$ يكون مرفوعا الى أس صفر ومن ثمة لا يمكن تخليص المضروب المشترك من كمي الكسر المفروض واسقاطه منهما

ولنفرض لعمومية هذه الطريقة أن

$$\frac{\text{ق س}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ع}(\text{س} - \text{ح})^{\text{ء}} + \text{ك}(\text{س} - \text{ح})^{\text{ب}} + \text{ل}(\text{س} - \text{ح})^{\text{و}} + \cdots \text{الخ}}{\text{ع}'(\text{س} - \text{ح})^{\text{ء}'} + \text{ك}'(\text{س} - \text{ح})^{\text{ب}'} + \text{ل}(\text{س} - \text{ح})^{\text{و}'} + \cdots \text{الخ}}$$

وان كميات ء و ب و و ... الخ و ءَ و بَ و وَ ... الخ موجبة ومتزايدة فهذا الكسر يؤول الى $\frac{0}{0}$ بوضع $\text{س} = \text{ح}$ ويمكننا ان نغير كمية س بكمية $\text{ح} + \text{هـ}$ عوضا عن تغييرها بكمية ح فقط لكن

بعد انتهاء العملية نفرض هـ = ٠ والناتج الحادث يكون كالناتج من تغيير س بكمية ح من اول وهلة ونجد حينئذ

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ح}\,\text{هـ}^{\text{ء}} + \text{ك}\,\text{هـ}^{\text{ب}} + \text{ل}\,\text{هـ}^{\text{و}} + \cdots \text{الخ}}{\text{ح}'\,\text{هـ}^{\text{ء}'} + \text{ك}'\,\text{هـ}^{\text{ب}'} + \text{ل}'\,\text{هـ}^{\text{و}'} + \cdots \text{الخ}} \cdots (٤٥)$$

وباعتبار كون ء و ءَ يكونان اصغر الاسس الداخلة في هاتين المتسلسلتين يمكن وقوع هذه الثلاث حالات

$$\text{ء} > \text{ء}' \quad \text{و} \quad \text{ء} = \text{ء}' \quad \text{و} \quad \text{ء} < \text{ء}'$$

ففي الحالة الاولى اذا قسمت كميتا كسر (٤٥) على $\text{هـ}^{\text{ء}'}$ يحدث

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ح}\,\text{هـ}^{\text{ء}-\text{ء}'} + \text{ك}\,\text{هـ}^{\text{ب}-\text{ء}'} + \text{ل}\,\text{هـ}^{\text{و}-\text{ء}'} \cdots \text{الخ}}{\text{ح}' + \text{ك}'\,\text{هـ}^{\text{ب}'-\text{ء}'} + \text{ل}'\,\text{هـ}^{\text{و}'-\text{ء}'} + \cdots \text{الخ}} \cdots (٤٦)$$

وحيث ان $\text{ء} > \text{ء}'$ فرضا فعدد $\text{ء} - \text{ء}'$ يكون موجبا ومن باب اولى تكون كميات $\text{ب} - \text{ء}'$ و $\text{و} - \text{ء}'$ ... الخ و $\text{ب}' - \text{ء}'$ و $\text{و}' - \text{ء}'$ ... الخ موجبة كذلك لان ء و ب و و ... الخ و ءَ و بَ و وَ ... الخ متزايدة واذا جعلنا الآن هـ = ٠ انحذفت جميع حدود الطرف الثاني لمعادلة (٤٦) ما عدا حَ ويعلم من ذلك ان هذه المعادلة تؤول الى

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٠}{\text{ح}'} = ٠$$

وفي الحالة الثانية وهي التي يكون فيها $\text{ء} = \text{ء}'$ يؤول حد $\text{ح}\,\text{هـ}^{\text{ء}-\text{ء}'}$ الى $\text{ح}\,\text{هـ}^{٠} = \text{ح}$ ويعلم من ذلك انه حين يجعل س = ح تؤول معادلة (٤٦) الى $\frac{\text{ح}}{\text{ح}'}$

وفي الحالة الثالثة وهي التي فيها $\text{ء} < \text{ء}'$ تقسيم كميتا كسر (٤٥) على

$\text{هـ}^{\text{ء}}$

$\overset{\cdot}{هـ}$ فيوجد

$$\frac{\text{ك}س}{\text{ك}ص} = \frac{ع + ح هـ^{ن-د} + ل هـ^{و-د} + \cdots الخ}{ع' هـ^{د} + ح' هـ^{د'} \cdots ل' هـ^{و'-د} + خ}$$

ويشاهد أن فرضية هـ = ٠ تجعل هذه المعادلة آيلة الى

$$\frac{\text{ك}س}{\text{ك}ص} = \frac{ع}{خ} = \infty$$

• ٨٦ • ولنأخذ هذا الكسر $\dfrac{(س^{٣} - ٣ ح س + ٢ ح)^{\frac{٢}{٣}}}{(س^{٢} - ح^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$ الذى يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بجعل س = ح مثلا فنضع ح + هـ محل س فيه فيتحول الى

$$\frac{(هـ^{٣} - ح هـ)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ ح^{٢} هـ + ٣ ح هـ^{٢} + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{هـ^{\frac{٢}{٣}} (هـ - ح)^{\frac{٢}{٣}}}{هـ^{\frac{١}{٢}} (٣ ح^{٢} + ٣ ح هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{هـ^{\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢}} (هـ - ح)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ ح^{٢} + ٣ ح هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{هـ^{\frac{١}{٦}} (هـ - ح)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ ح^{٢} + ٣ ح هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$$

ثم نجعل هـ = ٠ فيوجد

$$\frac{\text{ك}س}{\text{ك}ص} = \frac{٠}{(٣ ح^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = ٠$$

• ٨٧ • اذا جعل أحد مقادير س كيفى كسر $\frac{\text{ك}ص}{\text{ك}س}$ غير محدودتين تقسم هاتان الكميتان على ك س × ك ص فيؤول هذا الكسر الى

$$\frac{\text{ك}ص}{\text{ك}س} = \frac{\frac{١}{\text{ك}س}}{\frac{١}{\text{ك}ص}} = \frac{٠}{٠}$$

ثم تجرى عليه العمليات اللازمة لمعرفة مقداره الحقيقى حيث انه قد آل الى $\frac{٠}{٠}$

* ٨٨ * وبالجملة متى جعل فرض $س = ٠$ احد مضروبى حاصل ضرب $م ق$ آيلا الى صفر وجعل المضروب الآخر غير منته واريد معرفة المقدار الحقيقى لهذا الحاصل يحوّل الحاصل المذكور الى صورة كسر بالكيفية الآتية وهى ان يفرض اولا أن حاصل الضرب المفروض يكون $م \times ق$ وان مضروب $م$ هو الذى يصير صفرا بفرض $س = ٠$ ومضروب $ق$ يصير غير منته ثم يوضع هذا الحاصل هكذا

$$م \times ق = \frac{م}{\frac{١}{ق}}$$

ولما كان فرض $س = ٠$ يجعل مضروب $ق$ غير منته لزم ان يكون $\frac{١}{ق} = ٠$ ويؤول حاصل الضرب السابق حينئذ الى $\frac{٠}{٠}$ فتجرى عليه العملية السابقة

(فى النهايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغير واحد)

* ٨٩ * يمكن اعطاء كمية $هـ$ فى متسلسلة تيلور مقدارا بحيث يصير اى حد يراد من حدودها اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه ولبيان ذلك نكتب المتسلسلة وهى

$$ص + \frac{وص}{وس} هـ + \frac{و^٢ص}{وس^٢}\frac{هـ^٢}{٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣}\frac{هـ^٣}{٢\times٣} + الخ$$

ونقول اذا اردنا ان يكون حد $\frac{وص}{وس} هـ$ مثلا اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه نضع جزء المتسلسلة المعتبر من ابتداء هذا الحد هكذا

$$\left(\frac{وص}{وس} + \frac{و^٢ص}{وس^٢}\frac{هـ}{٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣}\frac{هـ^٢}{٢\times٣} + الخ\right) هـ \quad (٤٧)$$

لكنه بفرض $هـ = ٠$ ينعدم جزء $\frac{و^٢ص}{وس^٢}\frac{هـ}{٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣}\frac{هـ^٢}{٢\times٣} + الخ$

فمن ثمة يمكن اخذ كمية $هـ$ صغيرة جدا بتقاربها من صفر ليصير هذا الجزء صغيرا

بحسب

بحسب الارادة ويعلم من ذلك انه يمكن اعطاء كمية هـ مقدارا بحيث يكون ذلك الجزء اصغر من كمية $\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}$ التي ليست محتوية على هـ ولتكن ع رمز المايؤول اليه حاصل جمع $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}\,\frac{\text{هـ}}{2}+\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3}\,\frac{\text{هـ}^2}{2\times3}+$ الخ في هذه الحالة فتؤول متسلسلة (٤٧) الى

$\left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}+\text{ع}\right)$ هـ وحيث انه يوجد

$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} > \text{ع}$ فبضرب الطرفين في هـ يحدث

$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} > \text{ع هـ}$ او

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} > \left(\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}\,\frac{\text{هـ}}{2}+\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3}\,\frac{\text{هـ}^2}{2\times3}+\text{الخ}\right)\text{هـ} \quad \text{او}$$

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} > \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}\,\frac{\text{هـ}^2}{2}+\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3}\,\frac{\text{هـ}^3}{2\times3}+\text{الخ}$$

وهذا ما اردنا اثباته وبمثله يبرهن على اى حد بالنسبة لجميع ما يليه

* ٩٠ * لتكن ص = د س معادلة بمتغيرين فيمكن دائما اعتبار هذه المعادلة كمعادلة منحنٍ رأسياته هي مقادير مختلفة للدالة ص ويقال ان دالة ص هذه في نهايتها الصغرى متى مالت للزيادة بعد تناقصها شيأ فشيأ ومثاله منحنى م ب (شكل ٩) الذي معادلته ص = ح + د س^2 فانه يشاهد ان رأسياته التي هي م ع و مَ عَ ... الخ تأخذ في النقصان الى نقطة ب ومن ابتداء هذه النقطة تأخذ الرأسيات ك ذ و كَ ذَ ... الخ في الزيادة وعلى هذا يكون الرأسي ا ب هو النهاية الصغرى للدالة ص

• ٩١ • ويقال ايضا ان الدالة ص أتت الى نهايتها الكبرى متى انتهت بعد تزايدها فى نقطة تأخذ فى النقص من ابتدائها ويكفيك (شكل ١٠) مثلا فى رأسيات منحنى حدو الذى معادلته ص = هـ ـــ دس تتبين انه تأخذ فى النقص من ابتداء نقطة ى من الجانبين فرأسى اد فيه هو النهاية الكبرى للدالة ص

• ٩٢ • وهذه منحنيات ليس لها الا نهاية كبرى فقط ومنحنيات ليس لها الا نهاية صغرى ومنحنيات فيها النوعان ومنحنيات ليس لها نهايات بالكلية فان منحنى م س (شكل ٩) الذى معادلته ص = ح + دس² لا توجد له نهاية كبرى لانه يعلم من بعد معادلته ان رأسياته تاخذ فى التزايد ابدا

ودائرة حـد (شكل ١١) التى معادلتها

نق² = (ص ـــ هـ)² + (س ـــ و)² توجد لها النهايتان الكبرى والصغرى متحدتين فى افق اح واكبر هاتين النهايتين دح واصغرهما ـح

• ٩٣ • متى توجد نهاية كبرى اوصغرى للدالة ص التى يتغير واحد منها س فتتعين هذه النهاية اذا علم الافق الموافق لها لانه اذا علم مقدار س الموافق لنهاية كبرى او صغرى للمنحنى المستدل عليه بمعادلة ص = دس وكان ذلك المقدار ح مثلا يكفى ان تجعل س = ح فى معادلة ص = دس ليكون مقدار ص الحادث منها هو النهاية الكبرى او الصغرى المطلوبة

• ٩٤ • وليكن ص = دس رأسى هو مح (شكل ١٢) ويكون فى نهايته الكبرى فاذا اخذ أفق اح زيادة هـ المتبينة بخط حح َ وقطع حح ً = هـ ايضا فالشروط الواقعة ليكون حم نهاية كبرى تكون

حَمَ < حم و حًمً < حم. أو .

د(س + هـ) < د س ، د (س − هـ) < د س

وبالعكس اذا كانت [illegible] (شكل ١٣) نهاية صغرى [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ان الشروط [illegible]

[illegible] نهاية صغرى [illegible]

[illegible]

د(س + هـ) > د س ، د (س − هـ) > د س

ويعلم من ذلك انه متى تكون [illegible] د (س + هـ) ، د (س − هـ) معا صغر من د س يوجد النهاية كبرى ومتى [illegible] معا أكبر منها يوجد النهاية نهاية صغرى واذا كانت احدى [illegible] [illegible] والاخرى اصغر من د س فلا توجد نهاية [illegible] ولا صغرى

* ٩٥ * ونبحث عن هذه الشروط في [illegible] [illegible] من المعلوم انه يوجد من قضية تيلور

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{ص} + \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}\cdot\frac{\text{هـ}^2}{2} + \frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{د س}^3}\cdot\frac{\text{هـ}^3}{2\times3} + \text{إلخ} \quad \cdots (8$$

وبتغيير + هـ بكمية − هـ في هذا الدستور يحدث

$$\text{د}(\text{س}-\text{هـ}) = \text{ص} - \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}\cdot\frac{\text{هـ}^2}{2} - \frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{د س}^3}\cdot\frac{\text{هـ}^3}{2\times3} + \text{إلخ} \quad \cdots (9$$

ولاجل ان تكون ص = د س نهاية كبرى [illegible] [illegible] [illegible] هذان الدستوران [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] لا يقع [illegible]

الا اذا كان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ [illegible] [illegible] [illegible] $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٠

امكن ان يعطى الكمية هـ مقدارا بحيث يكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ هـ [illegible] من حاصل الجمع الجبري للحدود التي تليه في كل من متسلسلتين [illegible] [illegible] اشارة

ست $\frac{وص}{وس}$ هـ وحده كشارة تناتج من ارتباطه بجميع الحدود التى تليه اذن اذا كان $\frac{وص}{وس}$ موجبا فى احد حلى (٤٨) و (٤٩) فدلت الصل كانت اكبر من ص وكانت اصغر من ص اذا كان الحد المذكور وهو $\frac{وص}{وس}$ هـ سلبيا وحيث ان اشارتى $\frac{وص}{وس}$ هـ متعاكسة فى هذين الحدين يعنى موجبة فى احدهما وسالبة فى الآخر فينتج من ذلك انه لا يكون احدى كميتى $د(س+هـ)$ و $د(س-هـ)$ اكبر من $د س$ والاخرى اصغر

ويظهر من هذا انه اذا لم يكن $\frac{وص}{وس}$ صفرا فلا توجد نهاية كبرى ولاصغرى اما اذا كان $\frac{وص}{وس} = ٠$ فان حلى (٤٨) و (٤٩) يؤولان حينئذ الى

$$د(س+هـ) = ص + \frac{وص}{وس}\frac{هـ^٢}{٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣}\frac{هـ^٣}{٢\times٣} + \cdots \text{الخ}$$

$$د(س-هـ) = ص + \frac{وص}{وس^٢}\frac{هـ^٢}{٢} - \frac{و^٣ص}{وس^٣}\frac{هـ^٣}{٢\times٣} + \cdots \text{الخ}$$

واشارة الحدود التى تلى ص تتعلق فى هذه الحالة باشارة $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ اذا اخذت كمية هـ مقدارا صغيرا كافيا لان يكون $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ هـ اكبر من حاصل الجمع الجبرى للحدود الآتية بعده وحيث ان اشارة $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ متحدة فى الحلين فاذا كانت هذه الاشارة هى الزائد فدالتا $(س+هـ)$ و $(س-هـ)$

تكونان

تكون اكبر من ق س وتكون ق س فى هذه الحالة نهاية صغرى وكذا اذا كان $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2}$ سالبا شوهد ان ق س تكون نهاية كبرى

* ٩٦ * ولتتميم هذه القضية ننبه انه قد يكون $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2}$ صفرا مع

وجود $\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{س}} = ٠$

وفى هذه الحالة لا توجد نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا كان $\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{و}\text{س}^3} = ٠$

ايضا لان اشارة الحدود التى تلى ص تكون عند ذلك متعلقة باشارة $\frac{\text{و}^4\text{ص}}{\text{و}\text{س}^4}$ حين تؤخذ ه صغيرة جدا ويثبت انه اذا كان $\frac{\text{و}^4\text{ص}}{\text{و}\text{س}^4}$ موجبا تكون ق س نهاية صغرى واذا كان سالبا تكون نهاية كبرى وهلم جرا

وعلى العموم متى يكون المكرر التفاضلى الاول الذى لم يحذف بدرجة مزدوجة فانه يوجد نهاية صغرى اذا كان موجبا ونهاية كبرى اذا كان سالبا

(المثال الاول)

* ٩٧ * لمعرفة نهايات هذه الدالة ح − د س + س² نصنع

اولا ص = ح − د س + س²

ثم نأخذ التفاضل ونقسم على و س فيحدث

$$\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{س}} = -\text{د} + ٢\text{س}$$

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2} = ٢$$

وبايجاب مقدار $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2}$ يستدل على انه يوجد للدالة المفروضة نهاية صغرى

وتعيين الاوفق الموافق لهذه النهاية نساوي مقدار $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ بصفر فيحدث منه $\text{س} = $ [illegible] واذا وضع هذا المقدار في مقدار ص بدلا عن س يحدث $\text{ص} = \text{ح} - $ [illegible] وهذا المقدار هو مقدار النهاية الصغرى المطلوبة

(المثال الثاني)

* ٩٨ * لتكن $\text{ح}^{\text{ه}} + \text{ء}^{٣}\text{س} - \text{ه}^{٢}\text{س}^{٢}$ كمية يراد معرفة نهايتها فنضع

$\text{ص} = \text{ح}^{\text{ه}} + \text{ء}^{٣}\text{س} - \text{ه}^{٢}\text{س}^{٢}$ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على وس فنجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ء}^{٣} - ٢\text{ه}^{٢}\text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = -٢\text{ه}^{٢}$$

وحيث ان $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ سالب فيوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى يستخرج الاوفق الموافق لها من معادلة $\text{ء}^{٣} - ٢\text{ه}^{٢}\text{س} = ٠$ فيوجد $\text{س} = \frac{\text{ء}^{٣}}{٢\text{ه}^{٢}}$ وبوضع هذا المقدار في مقدار ص بدلا عن س يوجد $\text{ص} = \text{ح}^{\text{ه}} + \frac{\text{ء}^{٦}}{٤\text{ه}^{٢}}$ وهو مقدار النهاية الكبرى المراد ايجادها

(المثال الثالث)

* ٩٩ * لتكن ايضا معادلة $\text{ص} = ٣\text{ح}^{٢}\text{س}^{٣} - \text{ء}^{٤}\text{س} + \text{ه}^{٥}$

فنأخذ التفاضل ونقسم على وس فنجد كما تقدم

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٩\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{ء}^{٤} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = ١٨\,\text{ح}^{٢}\text{س}$$

ثم نساوي مقدار المكرر التفاضلي $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ بصفر فيوجد

$$٩\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{ء}^{٤} = ٠ \quad \text{ومنه يستخرج}$$

$$\text{س} = \pm \frac{\text{ء}^{٢}}{٣\text{ح}}$$

واذا

واذا وضعنا مقداری س فی مقدار و٢ص/وس٢ على التوالى بدلا عن

س يوجد و٢ص/وس٢ = ... ٦ ج ، و٢ص/وس٢ = − ٦ ج

وبهذا يستدل على انه يوجد نهاية مفروضة نهاية صغرى ، وهى الموافقة الى ان

س = + ٣ج ونهاية كبرى موافقة الى ان س = − ٣ج

وبوضع هذه المقادير فی مقدار ص يوجد اولا ص = هـ − ٢ج٣/٩

وهو مقدار النهاية الصغرى ويوجد ثانيا ص = هـ + ٢ج٣/٩

وهو مقدار النهاية الكبرى

(تطبيق نظر النهايات على حل جملة مسائل)

(المسئلة الاولى)

* ١٠٠ * اننا ان نقسم عددا مفروضا الى قسمين بشرط ان يكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن

ولاجل ذلك نفرض العدد ح واحد القسمين المضروبين س فالقسم الآخر يكون ح − س وكمية س(ح − س) تكون هى الكمية التى يراد معرفة نهايتها الكبرى فنضع

ص = س(ح − س) ثم نأخذ التفاضل ونقسم على وس فيوجد

وص/وس = ح − ٢س ، و٢ص/وس٢ = − ٢

وحيث ان و٢ص/وس٢ سالب فيتحقق انه يوجد نهاية كبرى بخلاف ما اذا كان

هذا المقدار موجبا فان المسئلة تكون غير ممكنة ثم انه بمساواة مقدار وص/وس

بصفر يحدث منه س = ح/٢ ويعلم من ذلك انه يجب قسمة العدد المفروض قسمين متساويين ليكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن او نهاية كبرى

(المسئلة الثانية)

١٠١ لنعين اعظم الاسطوانات الممكن رسمها داخل مخروط قائم

ونرمز لخط ح و الذي هو ارتفاع المخروط (شكل ١٤) بحرف ح ونرمز بحرف د لخط أو الذي هو نصف قطر القاعدة ثم نرمز بحرف س لخط ح هـ الذي هو بعد رأس المخروط عن مركز الدائرة العليا للاسطوانة فيحدث من تشابه مثلثي ح أو و ح هـ ءَ هذه المتناسبة

ح و : أو :: ح ءَ : هـ ءَ أو

ح : د :: س : هـ ءَ ومنها يحدث

$$\text{هـ ءَ} = \frac{\text{د س}}{\text{ح}}$$

ولنفرض ان ط تكون نسبة القطر الى محيطه فمساحة دائرة هـ ء ف التي نصف قطرها يساوي $\frac{\text{د س}}{\text{ح}}$ تكون $\frac{\text{ط د}^2\text{س}^2}{\text{ح}^2}$ وبضرب هذه المساحة في ارتفاع الاسطوانة الذي هو ح ـ س يحدث حجم تلك الاسطوانة ويكون ذلك الحجم $\frac{\text{ط د}^2\text{س}^2}{\text{ح}^2}$ (ح ـ س) وهذه الكمية تكون هي التي يراد ايجاد نهايتها الكبرى فنساويها بحرف ص ليحدث

ص = $\frac{\text{ط د}^2\text{س}^2}{\text{ح}^2}$ (ح ـ س) ثم نأخذ التفاضل ونقسم على وس فيوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{ط د}^2}{\text{ح}^2}\left(\text{٢ ح س} - \text{٣ س}^2\right) \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = \frac{\text{ط د}^2}{\text{ح}^2}\left(\text{٢ ح} - \text{٦ س}\right)$$

وبمساواة مقدار $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ بصفر يوجد

$$\frac{\text{ط د}^2}{\text{ح}^2}\left(\text{٢ ح س} - \text{٣ س}^2\right) = ٠ \quad \text{أو}$$

٢ ح س

$٢ ح س - ٣ س^٢ = ٠$ ومنها يخرج

$س = ٠$ و $س = \frac{٢ح}{٣}$

فمقدار $س = ٠$ لا يؤدي الى نهاية كبرى لان $\frac{و ص}{و س}$ يؤول به الى $٢ ح^٢$ وهو عدد موجب فيؤدي حينئذ الى نهاية صغرى وبالحقيقة متى يفرض $س = ٠$ تؤول الاسطوانة الى محور المخروط (فانه كلما ارتفعت الاسطوانة قل حجمها) ومقدار $س = \frac{٢ح}{٣}$ يكون هو الموافق للمسئلة وحده لان مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ يؤول به الى ... وهو عدد سالب فاذا طرح $ع ق' = س = \frac{٢}{٣} ع ق$ من ارتفاع المخروط بقي $ق و' = \frac{١}{٣} ع و$ ويعلم من ذلك ان حجم الاسطوانات الممكن رسمها داخل مخروط قائم ما كان ارتفاعها ثلث ارتفاع ذلك المخروط

(المسئلة الثالثة)

* ١٠٢ * لنا ان نقسم مستقيم اب (شكل ١٥) الى قسمين اح و حب بشرط ان يكون حاصل ضرب $اح \times حب^٣$ نهاية كبرى ولذلك نرمز بحرف ح لخط اب الكلي وبحرف س لقسم حب فالمعادلة التي يتأدى اليها ويؤخذ تفاضلها تكون

$ص = س^٣ (ح - س)$ ثم يوجد باخذ التفاضل والقسمة على و س

$$\frac{و ص}{و س} = ٣ ح س^٢ - ٤ س^٣ ،$$

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٦ ح س - ١٢ س^٢$$

وبمساواة مقدار $\frac{و ص}{و س}$ بصفر يخرج منه $س^٢ = ٠$ او $س = \frac{٣ح}{٤}$

ومقدار سن الذي يكون سـ هو الذي يوافق المسئلة فقط لان مقدار $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}}$

يوجد بالحساب سالب وهو $-\frac{٩ج^{2}}{٤}$

* ١٠٣ * وليتنبه انه متى يوجد مضروب ثابت موجب فى مقدار

مكرر $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ المتصل يمكن اسقاط هذا المضروب لانه اذا وجدنا $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$

$=$ ع دس استخرجنا منه $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}} = ع \frac{\text{و . دس}}{\text{و س}}$ وحيث

كانت هذه المعادلة الاخيرة لا تفيدنا لا بيان اشارة مقدار $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}}$ وهذه

الاشارة لا تتعلق الا باشارة $\frac{\text{و . دس}}{\text{و س}}$ لان ع مضروب ثابت موجب

علم من ذلك انه يمكن اسقاط مضروب ع من هذه المعادلة وكذا يمكن اسقاطه

من معادلة $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} =$ ع دس لانه حيث كان اللازم مساواة الطرف

الثانى لهذه المعادلة صفر لنستخرج منها س فمعادلة ع دس $= ٠$

تحدث دس $= ٠$ ويتضح من ذلك انه يمكن اسقاط الثابتة

(المسئلة الرابعة)

* ١٠٤ * المراد تعيين الاناء الاسطوانى الذى يسع كمية معلومة الحجم

من الماء ويكون سطحه الداخلى اصغر ما يمكن ولذلك

نرمز لحجم الماء المعلوم بحرف ح ولنصف قطر قاعدة الاسطوانة بحرف

س فكمية ط س² تكون هى مساحة قاعدة هذه الاسطوانة وحيث انه

بضرب الارتفاع فى مساحة القاعدة يحدث حجم الاسطوانة يوجد

ارتفاع الاسطوانة $\times$ ط س² $=$ ح ومنه يستخرج

ارتفاع الاسطوانة $= \frac{\text{ح}}{\text{ط س}^{2}}$

وبضرب

[illegible] ارتفاع و محيط [illegible] قاعدة الذى هو ٢ ط س [illegible]

[illegible] × [illegible]

وهذا الحاصل [illegible] مساحة [illegible] الاسطوانة فاذا صيف عليه كمية

[illegible]

[illegible]

[illegible] لاجل ذلك

ص = [illegible] ، [illegible]

و ص / و س = [illegible]

و٢ ص / و س٢ = [illegible] ، ٢ ط

ثم ساوى مقدار و ص / و س بصفر يحدث منه

ص = ∛ [illegible]

وحيث ان هذا المقدار يوافق النهاية الصغرى لانه يجعل و٢ ص / و س٢ موجبا علم

من ذلك ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المطلوبة يساوى ∛ [illegible] واذا وضع

هذه [illegible] الكمية المستعملة ارتفاع [illegible]

ارتفاع الاسطوانة = [illegible]

ويجرى هذه المسئلة فى عمل [illegible]

[illegible]

المعلوم مقدار من البارود والمراد معرفة الاتساع اللازم لهاون ذى خزنة اسطوانية يكون فعل قوة البارود على حائط هذه الخزنة اصغر ما يكون وينظر ان هذه المسئلة تؤول الى تعيين اصغر السطوح التى تأخذها الخزنة

وبالنظر الى ما سبق يعلم انه ينبغى ان يكون نصف قطر قاعدتها مساويا الى ارتفاعها

(المسئلة الخامسة)

* ١٠٥ * نريد أن نرسم مخروطا داخل كرة بشرط ان يكون سطحه المحدب اكبر ما يكون بالنسبة للمخاريط الممكن رسمها داخل هذه الكرة

ولنفرض ان نصف دائرة ام‍ب (شكل ١٦) تدور حول محور اب فيحدث وتر ام فى هذه الدورة مخروطا ارتفاعه اح ونصف قطر قاعدته مح ومساحة السطح المحدب لهذا المخروط تكون مساوية الى

محيط حم × ½ ام = ٢ط حم × ½ ام = ط حم × ام

فنريد الآن تعيين حم و ام ولذلك نفرض ان اب = ٢ر و اح = س فيحدث من توسط حم فى التناسب بين اح و بح هذه المتناسبة

س : مح :: مح : ٢ر — س ومنها يحدث

مح = √(٢رس — س٢)

وكذا من توسط ام فى النسبة بين اح و اب يوجد

س : ام :: ام : ٢ر ويحدث من ذلك

ام = √(٢رس)

وبوضع هذه المقادير عوضا عن مح و ام فى الكمية التى تبين السطح المحدب للمخروط يوجد

السطح المحدب للمخروط = ط √(٢رس — س٢) √(٢رس) = ط √(٤ر٢س٢ — ٢رس٣)

وبالرمز بحرف ص لهذه الكمية يكون

ص = ط √(٤ر٢س٢ — ٢رس٣)

ثم

ثم يجرى التفاضل بناء على (بند ١٠٣) فيكون

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \frac{\text{٤ح}^{٢}\text{س} - \text{٣ح س}^{٢}}{\sqrt{\text{٤ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{٢ح س}^{٣}}}$$ وباسقاط مضروب س المشترك يكون

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \frac{\text{٤ح}^{٢} - \text{٣ح س}}{\sqrt{\text{٤ح}^{٢} - \text{٢ح س}}} \quad \cdots\cdots \quad (٥٠)$$

ولاجل ان يكون هذا المقدار مساويا الى صفر يوضع

$\text{٤ح}^{٢} - \text{٣ح س} = ٠$ فيستخرج منه

$$\text{س} = \frac{٤}{٣}\text{ح}$$

وهذا المقدار يوافق نهاية كبرى لانه يجعل $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ سالبا

* ١٠٦ * وقبل البحث عن تعيين مقدار $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ نشرح طريقة يختصر بها الحساب فى بعض الحالات وليتأمل اولا انه اذا آلت دالة لكمية س الى صفر بمقدار أخذه متغير س فلا يلزم منه ان يكون مكررها التفاضلى صفرا ايضا فان المكرر التفاضلى $\text{٢س} - ٥$ للدالة $\text{س}^{٢} - \text{٥س} + ٦$ التى تؤول الى صفر بفرض $\text{س} = ٢$ أو $\text{س} = ٣$ لا يؤول الى صفر بهذه الفروضات.

* ١٠٧ * قد يمكن فى بعض الاوقات اختصار العمليات المستعملة لمعرفة هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى لاننا اذا فرضنا انه يراد تعيين المكرر التفاضلى لمعادلة $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \text{ب} \times \text{ب}'$ التى فيها ب و ب' دوال المتغير س واحداهما وهى ب تؤول الى صفر ببعض المقادير التى يأخذها متغير س وأخذنا تفاضل هذه المعادلة كما فى

(بند ١٤١) [illegible] $و\,س$ يوجد

$$\frac{و^{ن} ص}{و\, س^{ن}} = \frac{ت\; و^{ن} س}{و\, س} + \frac{ت_{١}\; و^{ن} ت}{و\, س}$$

وحيث ان س تؤول الى صفر بالمقدار الذى تأخذه كمية س فتؤول تلك المعادلة الى $\frac{و^{ن} ص}{و\, س^{ن}} = \frac{ت\; و^{ن} س}{و\, س}$ ويفهم من ذلك انه لايجاد $\frac{و^{ن} ص}{و\, س^{ن}}$ يلزم ضرب المكرر التفاضلى للمضروب الذى يصير صفرا فى المضروب الآخر [وهذه القاعدة ليست خالية عن العوارض فان $\frac{و\, ت}{و\, س}$ قد يكون صفرا ايضا ومثاله معادلة $\frac{و\, ص}{و\, س} = س^{٢} (س - ح)^{٢}$ التى تحتوى على جذور متساوية فان حدى مقدار $\frac{و^{٢} ص}{و\, س^{٢}}$ فيها يصيران اصفارا ويجب البحث عن المكررات التفاضلية التى بدرجة عليا حينئذ عوضا عن اسقاط المضروب المتبين برمز $ت_{١} \frac{و\, ت}{و\, س}$ كما فى (بند ٩٦) ليعرف هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى واذا صار $\frac{و\, ت_{١}}{و\, س}$ غير محدود فقد آل الامر الى حالة (بند ٨٧)]

* ١٠٨ * واذا أردنا مثلا معرفة المكرر التفاضلى بدرجة ثانية الى $\frac{و\, ص}{و\, س} = \frac{س - ح}{\sqrt{س}}$ بفرض $س = ح$ نضع المعادلة اولا هكذا

$$\frac{و\, ص}{و\, س} = \frac{١}{\sqrt{س}} \times (س - ح)$$ ويوجد من بعد البند المتقدم

و

$$\frac{و^2 ص}{و س^2} = \frac{1}{\sqrt{س}} \times \frac{و(... ح)}{و س} = ... \frac{1}{\sqrt{س}}$$

• ٩٠ • [illegible] استخراج

$\frac{و^2 ص}{و س^2}$ في حالة فرضية $س = \frac{٤}{٣}$ ح [illegible]

مضروبة فيوجد

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{ح س (٤ ح − ٣ س)}{\sqrt{٤ ح س^2 − ٢ ح س^3}} \quad و$$

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{ح س}{\sqrt{٤ ح س^2 − ٢ ح س^3}} \times (٤ ح − ٣ س)$$

ثم نقول حيث ان مضروب $(٤ ح − ٣ س)$ يساوى صفرا في هذه الحالة يوجد من بعد (بند ١٠٧)

$$\frac{و^2 ص}{و س^2} = \frac{ح س}{\sqrt{٤ ح س^2 − ٢ ح س^3}} \times \frac{و(٤ ح − ٣ س)}{و س}$$

$$= − \frac{٣ ح س}{\sqrt{٤ ح س^2 − ٢ ح س^3}}$$

واذا قسم بسط ومقام هذا الكسر الاخير على س يحدث

$\frac{و^2 ص}{و س^2} = − \frac{٣ ح}{\sqrt{٤ ح − ٢ ح س}}$ ثم يحدث بوضع مقدار س

الذى هو $\frac{٤ ح}{٣}$ عوضا عنه

$$\frac{و^2 ص}{و س^2} = − \frac{٣ ح}{\sqrt{٤ ح^2 − \frac{٨}{٣} ح^2}} = − \frac{٣ ح}{\sqrt{\frac{٤}{٣}}}$$

وحيث ان هذا المقدار سالب فيوافق مقدار س النهاية كبرى

•(المسئلة السادسة)•

* ١١٠ * نريد ان نقدّ من نقطة مفروضة داخل زاوية قائمة خطاً مستقيماً يكون جزؤه المحصور بين ضلعي هذه الزاوية نهاية صغرى ولذلك نفرض ان الزاوية تكون س ا ص (شكل ١٧) والنقطة المفروضة داخلها تكون ح ثم نفرض ان المستقيم المطلوب يكون وهـ ونرمز لبعد اب بحرف ح ولبعد س ح بحرف د ولبعد س هـ بحرف س فتحدث من تشابه مثلثي س ح هـ و اوهـ القائمي الزاوية هذه المناسبة

$$\text{سهـ} : \text{سح} :: \text{اهـ} : \text{او}$$

$$\text{س} : \text{د} :: \text{ح} + \text{س} : \text{او} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{او} = \frac{\text{د}}{\text{س}} (\text{ح} + \text{س})$$

وبتربيع الطرفين يكون

$$\overline{\text{او}}^2 = \frac{\text{د}^2}{\text{س}^2} (\text{ح} + \text{س})^2 \quad \text{وغير ذلك يوجد}$$

$$\overline{\text{اهـ}}^2 = (\text{ح} + \text{س})^2$$

فتوضع هذه المقادير في دستور $\text{وهـ} = \sqrt{\overline{\text{او}}^2 + \overline{\text{اهـ}}^2}$ فيحدث من ذلك

$$\text{وهـ} = \sqrt{\frac{\text{د}^2}{\text{س}^2}(\text{ح}+\text{س})^2 + (\text{ح}+\text{س})^2} = \sqrt{\left(\frac{\text{د}^2}{\text{س}^2}+1\right)(\text{ح}+\text{س})^2}$$

وباتحاد المقام في المضروب الاول الذي تحت الجذر يوجد

$$\text{وهـ} = \sqrt{\frac{\text{د}^2+\text{س}^2}{\text{س}^2}(\text{ح}+\text{س})^2} = \frac{\text{ح}+\text{س}}{\text{س}}\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2} = \text{ص}$$

وباعتبار هذه الكمية حاصل ضرب مضروب $\frac{\text{ح}+\text{س}}{\text{س}}$ في مضروب $\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}$ نجري التفاضل على مقتضى (بند ١٤) فيوجد

$$\text{وص} = \frac{\text{ح}+\text{س}}{\text{س}} \cdot \text{و}\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2} + \sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2} \cdot \text{و}\frac{\text{ح}+\text{س}}{\text{س}} \quad \text{او}$$

و

$$و ص = \frac{(ح+س)\, س و س}{س \sqrt{د^2+س^2}} + \sqrt{د^2+س^2} \times -\frac{ح و س}{س^2}$$

ثم نشترك المقامات بان نضرب كلتي كسرى ذلك في س وكلتي المختصر الثاني في $\sqrt{د^2+س^2}$ فيحدث

$$و ص = \frac{(ح+س)\, س^2 و س}{س^2 \sqrt{د^2+س^2}} + \frac{د^2+س^2}{س^2 \sqrt{د^2+س^2}} \times - ح و س$$

ثم نجمع البسوط ونختصر حدودها ونقسم على و س فيوجد اخيرا

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{س^3 - ح د^2}{س^2 \sqrt{د^2+س^2}}$$

وبمساواة البسط بصفر يستخرج منه

$$س = \sqrt[3]{ح د^2}$$

ولاجل ان يثبت ان هذا المقدار يوافق النهاية الصغرى يكفي ان ... موجب (بند ١٠٧) فحل البسط الذي هو المعروف ... تحصل على هذه الصورة

$$\frac{و^2 ص}{و س^2} = \frac{3 س^2}{س^2 \sqrt{د^2+س^2}} = \frac{3}{\sqrt{د^2+س^2}}$$ وهو مقدار موجب

بالطبع واذا عوضنا عن س بقيمته ... موجبا ايضا

• [illegible] •

• ١١١ • [illegible]
على ... مستقيم ... [illegible]

والمفروض ... مستقيم ... ١١ ... نرمز له بحرف ح

ونرمز لاحد الضلعين بحرف س فالضلع الآخر يصير $\sqrt{ح^2 - س^2}$

ومقدار مساحة المثلث يكون حينئذ $\frac{س}{2} \sqrt{ح^2 - س^2}$ فاذا رمزنا لهذه

المساحة بحرف ص وراجعنا (بند ١٠٣) وجدنا ان المعادلة التي لم يؤخذ تفاضلها تكون هي

$$\text{ص} = \text{س}\sqrt{\text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢}} \quad \text{أو وهو الاولى}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}} \quad \text{ومنها يستخرج}$$

$$\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = \frac{\text{ح}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{س}^{٣}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}}$$

وحيث ساوى هذا المقدار بصفر نجد

$$\text{ح}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{س}^{٣} = ٠ \quad \text{أو}$$

$$\text{س}\,(\text{ح}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٢}) = ٠ \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{س} = ٠ \quad \text{و} \quad ٢\,\text{س}^{٢} = \text{ح}^{٢}$$

وحيث انه لا يمكن ان يكون مقدار س صفر فيستخرج ذلك المقدار من المعادلة الثانية يعني الاخيرة فيوجد $\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٢}}$ وبهذا المقدار يستدل على ان ضلعي اد و دب يكونان متساويين

هذا وبأخذ تفاضل مضروب $\text{ح}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٢}$ يوجد كما في (بند ١٠٧) أن

$$\frac{\text{وَ}^{٢}\text{ص}}{\text{وَس}^{٢}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}} \times \frac{\text{وَ}(\text{ح}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٢})}{\text{وَس}} = -\frac{٤\,\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}}$$

وبسبب سلب هذا المقدار يتحقق ان فرضية $\text{ح}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٢} = ٠$ تحدث لمجهول س مقدارا يوافق الى نهاية كبرى

(في المدلول الهندسي للمكررات التفاضلية)

* ١١٢ * قد علمنا من (بند ٧١) ان $\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}$ يبين ظل الزاوية التي تقع بين الخط المماس في نقطة (س و ص) وبين الخط الافقي وحيث كانت هذه القضية اساسا لما يراد البحث عنه مدة بنيتها من اول وهلة بالوجه الآتي وهو أن نرمز الى ع م (شكل ٤) بحرف ص والى ع ح بحرف

بحرف

بحرف هـ ثم نرسم م ح موازيا لمحور الافقيات فيحدث

$$\text{ح ع} = \text{د}(\text{س} + \text{هـ})\ \text{و}$$

$$\text{م ح} = \text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د س} = \frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}\,\frac{\text{هـ}^2}{٢} + \dots \text{الخ}$$

وان رمزنا ... ظا ... الخ فمن ... سبب

$$\text{م ح} : \text{م ح} :: ١ : \text{ظا ع}$$

عوضا عن م ح و م ح ماساواهما نجد

$$\text{ظا ع} = \frac{\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}\,\frac{\text{هـ}^2}{١\times٢} + \dots \text{الخ}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{و ص}}{\text{و س}} + \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}\,\frac{\text{هـ}}{١\times٢} \dots \text{الخ}$$

وحين نرتقي الى النهاية تصير هـ صفرا ويؤول ظا ع الى ظا ط ويوجد اذن

$$\text{ظا ط} = \frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$$

هذا واذا صار ح م (شكل ٤٩) نهاية كبرى صار تماس م ط موازيا الى محور الافقيات فيحصل بينه وبين هذا المحور زاوية قدرها صفرا ولهذا السبب يوجد $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٠$

ومثل ذلك يثبت انه حين ... م ح نهاية صغرى ... يكون $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٠$

ويعلم من ذلك ان معادلة $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٠$ لا تبين الا شرط توازي المماس في نقطة م التي ابعادها س و ص الى محور الافقيات

١١٣ نبحث الآن عن الحالات التي يكون فيها $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ ...

[illegible] (شكل ٢٠) [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] $\text{د}(\text{س}+\text{هـ})-\text{د}\,\text{س}$
[illegible]

$$\text{مو}=\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,\text{هـ}+\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{٢}+\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{٢\times٣}+\cdots\ \text{الخ}$$

وحيث انه يحدث من تشابه مثلث م م و و م ع ق هذه المناسبة

$$\text{م و} : \text{م ق} :: \text{م و} : \text{ع ق} \quad \text{أو}$$
$$\text{هـ} : ٢\,\text{هـ} :: \text{م و} : \text{ع ق} \qquad \text{التي يستخرج منها}$$
$$\text{ع ق} = ٢\,\text{م و}$$

فيبدل فيها م و بمقداره ليوجد

$$\text{ع ق}=٢\,\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,\text{هـ}+٢\,\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{٢}+٢\,\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{٢\times٣}+\cdots\ \text{الخ}$$

وغير ذلك عندنا $\text{م ع} = \text{د}(\text{س}+٢\,\text{هـ})$
و $\text{ق ع} = \text{م ع}$

وبطرح الثانية من الاولى يوجد

$$\text{م ق}=\text{د}(\text{س}+٢\,\text{هـ})-\text{ص}=\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,٢\,\text{هـ}+\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{2}}\,\frac{٤\,\text{هـ}^{2}}{١\times٢}+\text{الخ}$$

ثم انك اذا اسقطت من هذا المقدار ع ق بقي لك (شكل ٢٠)

$$\text{م ع}=\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{2}}\,\text{هـ}^{2}+\text{الخ}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (٥١)$$

وفي الحالة التي يكون فيها تقعير المنحنى نحو محور الاقفيات (شكل ٢١) يلزم أن يطرح من مقدار ع ق مقدار م ق بعكس ماسلف ليستخرج

مقدار

[illegible] ويوجد [illegible]

$$ن = - \frac{ء ص}{ء س} \quad \ldots\ldots \quad (٥١)$$

[illegible] (٥١ , ٥٢)

[illegible] $\frac{ء ص}{ء س}$ في حد [illegible]

[illegible] وبناء على [illegible] جعل اشارة [illegible]

[illegible]

$\frac{ء ص}{ء س}$ [illegible] $\frac{ء ص}{ء س}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] لاشارات [illegible]

مع [illegible] $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ [illegible]

$$ن = + \frac{ء ص}{ء س} ع - \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$$

ومنها يحدث

$$\left.\begin{aligned} \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} &= ن ع \\ \frac{ء ص}{ء س} &= - ع \end{aligned}\right\} \quad (٥٣)$$

واذا اعتبرت [illegible]

واحدة [illegible] (٥٣) [illegible]

[illegible] التحديب [illegible]

$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ موجبا

واذا اعتبرنا بعد ذلك نتيجة معادلتى (٥٣) مع (شكل ٢١) المنسوبة لها

فتكون ن ـــ م ح يبين خطا مستقيما متعاكس فى الاشارة مع ص

. ومن ثم ان $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}$ يكون سالبا فى حالة (شكل ٦١) يعنى متى يكون

تقعير المنحنى متجها نحو محور الافقيات

* ١١٤ * قد فرضنا فيما مر ان المنحنى ممتد فوق محور الافقيات والآن نبحث عما ينتج حين يمتد المنحنى تحت المحور المذكور كما فى (شكل ٦٧)

فنقول من الشق من بعد ما سبق انه حيث كان المنحنى محدبا نحو محور

الافقيات فى نقطة م فكمية $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}$ أو م ت تكون موجبة لكن مستقيما

م ت و م ت الموجودان فى جهة واحدة من مماس ط ط يجب

ان يكونا متحدى الاشارة ومن ثمة يكون م ت موجبا كما أن م ت

موجب وينتج من ذلك ان $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}$ فى نقطة م المقعر فيها المنحنى نحو محور

الافقيات يكون مختلفا فى الاشارة مع الرأسى م ح المتبوع باشارة السلب

وبالعكس فانه يكون المنحنى محدبا نحو محور الافقيات متى كان ص

و $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}$ متحدى الاشارة واذن يمكن أن يقال فى العموم أن $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}$

يكون متحدا فى الاشارة مع ص متى كان المنحنى موجها تحديبه نحو

محور الافقيات بوقوعه فى اى جهة كانت ويأخذ اشارة عكس اشارة ص

متى كان المنحنى موجها تقعيره نحو المحور المذكور

ويعلم ان المنحنى يكون محدبا او مقعرا نحو محور الافقيات بحسب كون الرأسى

آيلا الى نهايته الصغرى او نهايته الكبرى ويتضح السبب فى ان $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}$

موجب فى الحالة الاولى وسالب فى الثانية

* ١١٥ * ويقال ايضا انه يمكن أن توجد نهاية كبرى اونهاية صغرى

متى يكون $\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{س}} = \infty$ ولشرح مدلول هذا الشرط نفرض أن

ص

[illegible]
ويرسم [illegible] على محور اس
و [illegible] على محور اص

[illegible] نهاية كبرى و صغرى [illegible] التي هي
[illegible] ص) وذلك يستخرج من [illegible] $\frac{و ص}{و س}$ = م

ثم يفرض م = ٠ ومن ثم ينتج $\frac{و ص}{و س}$ = [illegible] من معادلة

$\frac{و س}{و ص}$ = م ويشاهد أنه متى [illegible] م = ٠ يوجد $\frac{و ص}{و س}$ = [illegible]

وعلم من ذلك ان الشرط اللازم لوقوع نهاية كبرى وصغرى في جهة الافقيات
هو أن يكون $\frac{و ص}{و س} = \infty$

* ١١٦ * ولنمثل بمعادلة

[illegible]

فنستخرج منها $\frac{و ص}{و س}$ = [illegible] ويساوة هذا المقدار بصفر
يكون ص = ∞ ويتبين من ذلك أنه لا يوجد للمنحنى نهاية كبرى نحو
الراسيات الا على بعد غير محدود من محور اس
ولاجل أن يعرف هل توجد له نهايات نحو الافقيات اولا
(والنهايات تشمل الكبرى والصغرى) يفرض مقدار

وصـ / وسـ ... ٢صـ = ∞ ... تق ... يجعل

صـ .

وبهذا يكون مقدار و٢صـ / وسـ٢ الى ... وهو دائماً موجب ويعلم من ذلك ان مقدار صـ ... يصل الى نهاية صغرى للكمية سـ وتتعين هذه النهاية بجعل صـ = ٠ في معادلة المفروضة فتؤول الى سـ ـ د = ٠ ومنها يحدث سـ = د وهو مقدار النهاية الصغرى المطلوبة وهي مبينة بخط ام ف (شكل ٢٣)

* ١١٧ * وليتامل ان معادلة وصـ / وسـ = ∞ تدل على ان مماس مط (شكل ٢٣) تخذ زاوية قائمة ومن ثم يكون عموديا على محور الافقيات

(كلام كلي على النقط الغريبة والغريبة للمنحنيات)

* ١١٨ * في حساب التفاضل فائدة عظيمة لمعرفة صورة او شكل المنحنى المعلوم المعادلة وقد أمهت لنا مسايا النهايات الكبرى والصغرى طرق تعيين حدود المنحنى في جهة الافقيات والراسيات ولكن هذا غير كافه في تعيين صورة المنحنى او شكله فانا نشاهد مثلا عدم تشابه منحنيات اشكال (٦٨) و (٦٩) و (٧٠) التي لها نهايات متحدة وهي وح و ود في جهة الراسيات و او و وب في جهة الافقيات فان منحنى (شكل ٦٨) يتميز عن منحنى (شكل ٦٩) بكون انه لا يوجد في الاخير الا نقطة تحديب واحدة ونقطة التحديب هي التي يتحول المنحنى فيها من التحديب الى التقعير او عكسه واما المنحنى الاول وهو الموافق الى (شكل ٦٨) فانه يحتوي على نقطتين من نقط التحديب احداهما في هـ والاخرى في ح ويحتوي على نقطة قبية او عكسية في ع والمراد بهذه النقطة كل نقطة يتعطل المنحنى فيها عن طريق سيره دفعة واحدة

* ١١٩ * وعلى العموم كل نقطة وقع للمنحنى فيها تغير في سيره تسمى نقطة

نقطة فريدة أو غريبة وإذا علمنا موضع هذه النقط يمكن مع [illegible]

المنحنى في سيره

مثاله إذا فرض انه يوجد المنحنى (شكل ٧٠) نقطة تحديب [illegible]

[illegible] في [illegible] نقطتان عكسيتان في ف [illegible]

المنحنى بكيفية الآتية وهي أن نقول بالابتداء من [illegible]

في جهة الافقيات يتقعر المنحنى أولا نحو محور الافقيات إلى نقطة [illegible]

توجد فيها نقطة تحديب أعني يتحول المنحنى فيها من التقعر إلى التحديب

ومن هذه النقطة إلى ف يكون قوس هـ ف من المنحنى [illegible] المذكور

وفي نقطة ف التي هي نقطة عكسية [illegible]

بعدها يكون محدبا أيضا [illegible]

لنقطة التحديب [illegible] ويمتد [illegible]

نحو الراسيات ويتركب المنحنى الاخير من قوس [illegible]

ح إلى ح ومن ابتداء ا إلى ح [illegible] نحو محور

الافقيات ويتلاقيان في نقطة عكسية [illegible]

احداهما على التحديب جهة الافقيات [illegible] جهة الراسيات

* ١٢٠ * ومن بعد ما تقرر تعلم مزية تعيين ابعاد النقط الغريبة

بواسطة معادلة المنحنى وحيث بينا آنفا طرق ايجاد النهايات الكبرى والصغرى

فلم يبق علينا الآن نشتغل ببحث ما بقي من النقط وهي [illegible] فنقول

(في النقط [illegible])

* ١٢١ * قد علمنا مما سبق أن نقطة التحديب هي التي [illegible]

من التحديب إلى التقعير أو من التقعير إلى [illegible] (٧١)

يحتوي على نقطة من هذا الجنس في م [illegible]

ثم نعتبر ماسات الراسيات المحصورة بين م ع و م ع فنشاهد أن [illegible]

م [illegible] للراسي يأخذ في النقص وينعدم في نقطة م وإذا اعتبرنا الراسيات

التي بعدها وهي الكائنة عن يسار م [illegible] شاهدنا وقوع الامتداد [illegible]

تحت مماس ومن ثم تتغير شرطه بحق ... ... موجب ... ان
م ن ... سبا وهو ... شرط اسى هاشرحه بمعادلة ...
... ش ٧١ ... ح ح = هـ ... ح ح فن المعلوم انه يوجد

م ن = م ح — ن ح أو

م ن = د(س+هـ) — ن ح .... (٥٤)

والتعيين مقدار ن ح نسح

ن ح = م ح + ق و أو

ن ح = ص + ن و ...... (٥٥)

ولاستخراج مقدار ن و نظر انه يحدث من مثلث ق م و القائم الزاوية

ن و = م و ظا ن م و

وحيث انه يعلم من بند (٧١) ان ظل زاوية ن م و الواقعة بين المماس والخط المرسوم من نقطة المماس م موازيا للخط الافقي يساوى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ فاذا أبدلنا ظا ن م و في المعادلة الاخيرة بهذا المقدار ووضعنا هـ بدلا عن م و نجد أن

ن و = هـ $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٥٥) عوضا عن ق و ووضع مقدار ن ح الحادث بعد ذلك في معادلة (٥٤) يوجد

م ن = د(س+هـ) — ص — $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ هـ .... (٥٦)

ويمكن استخراج مقدار م ق من مقدار م ن بدون احتياج الى حساب لانه اذا قدرنا سير ان الراسي بالتوازي لنفسه يشاهد أن م ن يؤول الى م ق متى تغير هـ بكمية — هـ ويعلم من ذلك انه اذا ضربنا كمية + هـ بكمية — هـ في معادلة (٥٦) يوجد

م َ = د(س − هـ − ص ...) [illegible] (٥٧)

و ... [illegible] ما
يكون

م َ = (ص ...) [illegible]

م َ َ = (ص ...) [illegible]

وبختصره ... [illegible] بحث

م َ = [illegible] ... الخ (٥٠)

م َ َ = [illegible] ... الخ (٥١)

لكن لوقوع نقطة تحديب فى م يجب أن يكون احد خطى م َ و م َ َ واقعا فوق مماس ط ط َ والآخر تحته متى أخذ هـ مقدارا صغيرا جدا فيعلم من ذلك انه يلزم معا كمية م َ و م َ َ فى الاشارة وهذا لا يمكن الا اذا كان حد الاول وهو [illegible] من متسلسلتى (٥٨) و (٥٩) صفرا لانه دائما يكون هذا الحد مساويا لصفر [illegible] اعطاء كمية هـ مقدارا صغيرا كافيا لان يجعل [illegible] فالتاصل الجمع الجبرى لحدود التى تليه فى المتسلسلة واشارة هذا الحد تكون فى هذه

الحالة اشارة باقى المسلسلة وحيث كان هذا الحد متحد الاشارة فى المسلسلتين يكون $\text{م}\acute{\text{ق}}$ و $\text{م}\grave{\text{ق}}$ (شكل ٧١) متحدى الاشارة ايضا ومن حيث ذلك يعلم انه ليكون $\text{م}\acute{\text{ق}}$ و $\text{م}\grave{\text{ق}}$ مختلفى الاشارة يلزم أن يوجد

$$\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{\text{ن}}}\ \text{هـ}^{٢} = ٠ \quad \text{أو وهو الأولى}$$

$$\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{\text{ن}}} = ٠$$

* ١٢٢ * اذا جعل مقدار س الجاعل $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}}$ صفرا مقدار $\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٣}}$ ايلا الى صفر أيضا يجب لوجود نقطة تحديب أن يكون $\frac{\text{و}^{٤}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٤}}$ مساويا الى صفر كذلك واذا صار فى هذه الحالة $\frac{\text{و}^{٥}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٥}}$ صفرا يجب أن يكون ايضا $\frac{\text{و}^{٦}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٦}}$ مساويا الى صفر لتوجد نقطة تحديب وعلى هذا فقس واذن يجب أن يكون المكرر التفاضلى الاخير الذى يكون صفرا برتبة مزدوجة

* ١٢٣ * متى يجعل مقدار س المتحد فى حلى (٥٨) و (٥٩) $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}}$ غير محدود يكون هذان الحلان غير محدودين ايضا ولا ينتج شىء حينئذ من الاثبات السابق المؤسس على امكانية هذين الحلين وينبغى أن يعلم فى هذه الحالة أن شرط $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}} = ٠$ يستدل به فى العموم على وجوب تغيير اشارة $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}}$ فى نقطة التحديب وهذا يوافق ماهو مشروح فى بند (١١٣) ويمكن تغيير هذه الاشارة ايضا حين يصير هذا المكرر التفاضلى .

التفاضلى غير منتهٍ ولنمثل بمثال موضح لهذه المشكلة فنقول

ليكن $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = \frac{ى^{2}}{س - ح}$

فاذا ابدلت س بهذه المقادير

$س = ح - هـ$ يوجد $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = - \frac{ى^{2}}{هـ}$

$س = ح$ $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = \infty$

$س = ح + هـ$ $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = + \frac{ى^{2}}{هـ}$

ثم يشاهد ان مقام مقدار $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ هو الذى تتغير اشارته فى المكرر التفاضلى بعد نقطة التحديب

* ١٢٤ * وينتج مما سبق انه لامكان وجود نقطة تحديب فى منحنٍ يلزم أن يوجد لافق هذه النقطة

$\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = ٠$ او $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = \infty$

ومتى يؤكد وقوع احد هذين الشرطين تزاد وتنقص على التوالى من افق النقطة الموافقة لهذا الشرط كمية صغيرة جدا هـ فاذا صار مقدار $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ الذى تختلف فى الاشارة كان للمنحنى نقطة تحديب فانه متى كان $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ موجبا كان تحديب المنحنى متجها نحو محور الافقيات ومتى كان سالبا يكون تقعير المنحنى متجها نحو المحور المذكور

(المثال الاول)

* ١٢٥ * لتطبيق القضايا السابقة على امثلة فلننظر هل يوجد للمنحنى المستدل عليه بمعادلة

$$\text{ص} = \text{د} + ٢\,(\text{س} - \text{ح})^{٣} \quad \cdots\cdots (٦٠)$$

نقطة تحديب ولذا نأخذ التفاضل فيوجد بعد القسمة على و س

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٣ \times ٢\,(\text{س} - \text{ح})^{٢} \text{ ثم يوجد}$$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}} = ١٢\,(\text{س} - \text{ح}) \text{ و}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و س}^{٣}} = ١٢$$

ولاجل أن يمكن وجود نقطة تحديب للمنحنى يجب أن يكون لمتغير س

مقدارا يجعل $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ آيلا الى صفر وحيث كانت س كمية متغيرة

فيتعين احد مقاديرها بشرط وجود ١٢ (س − ح) = ٠ ويوجد

حينئذ س = ح لاجل الافق الذى يمكن أن يصلح لنقطة تحديب

ولتأكيد وجود هذه النقطة فى المنحنى ينقص من افق ح كمية صغيرة جدا

رمزها هـ ثم يوضع ح − هـ محل س فتكون نقطة مَ

(شكل ٧٢) التى افقها ح − هـ موافقة الى

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}} = -\,١٢\,\text{هـ}$$

ثم يوضع ح + هـ محل س فتوافق نقطة مً التى افقها ح + هـ

الى $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}} = +\,١٢\,\text{هـ}$ وبسبب اختلاف هذين الحلين فى

الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديب فى المنحنى المفروض فى م وحيث

كان فرض س = ح يجعل $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ آيلا الى صفر ايضا فيتحقق

توازى المماس فى نقطة التحديب بالمحور الافقى

(المثال الثانى)

* ١٣٦ * ولينبه هنا [illegible] مساواة مقدار $\frac{ءص}{ءس}$ للصفر
فانه يبحث عن وجود [illegible] لهذه المعادلة [illegible]
[illegible]

$$\frac{ءص}{ءس} [illegible]$$

ولا شك انه [illegible] مقدار $\frac{ءص}{ءس}$ [illegible]
ومن ثم [illegible] المستدل عليه بمعادلة [illegible]
[illegible] عن نقط [illegible]
[illegible] مقدار $\frac{ءص}{ءس}$ [illegible]
[illegible]

* [illegible] *

* ١٢٧ * [illegible] هذه المعادلة [illegible]
الى [illegible] ثم [illegible]

$$ص = س^{٣}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = [illegible]$$

$$\frac{ءص}{ءس} = [illegible]$$

ثم يوضع [illegible]

[illegible] فقط

ليبحث عن مقدار س الموافق الى نقطة [illegible] هذه المعادلة

أعني لا نقطة تحقق الا بوضع ص = ∞ وبهذا لا يستدل على شيء الا انه حيث تيسر لنا ايضا جعل مقدار $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ غير منتهية فتتحقق معادلة

$$\sqrt[3]{س^{-1}} = \infty$$

بوضع س = ٠ وبهذا المقدار يستدل على انه يمكن أن يكون للمنحني المروض نقطة تحديب في النقطة الاصلية ولتأكيد وجود هذه النقطة نبدل س بكميتي ٠ + هـ و ٠ — هـ اعني + هـ و — هـ على التعاقب وننظر هل يكون $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ في هاتين الحالتين متبوعا باشارتين مختلفتين والاولى أن تفعل هاتان العمليتان معا بابدال س بمقدار ± هـ فيؤول المكرر التفاضلي الذي بدرجة ثانية الى

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} = \pm \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{هـ}}$$

والمقدار العلوي وهو المتبوع باشارة + ينتسب الى افق اكبر من أفق نقطة التحديب والسفلي وهو المتبوع باشارة — ينتسب الى افق أصغر من افق هذه النقطة وبسبب تخالف هذين المقدارين في الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديب في المنحني المستدل عليه بمعادلة $ص^3 = س^5$ في النقطة الاصلية انظر (شكل ٧٣)

(المثال الرابع وهو الاخير)

* ١٢٨ * لتكن هذه المعادلة

$(ص - د)^2 = س^3$ فيوجد منها

$$ص = د \pm س^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \pm \frac{3}{2} س^{\frac{1}{2}}$$

$د^2$

$$\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = \pm \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \sqrt{\frac{١}{س}}$$

وحيث انه بجعل س = ٠ يوجد $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = \infty$ فيستدل بذلك على انه يمكن أن توجد نقطة تحديب فى النقطة الاصلية و تحقق وجودها وعدمه نجعل اولا س = + هـ ونضع هـذا المقدار فى مقدار $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ فيكون

$$\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = \pm \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \sqrt{\frac{١}{هـ}}$$

ثم نجعل س = — هـ فيصير مقدار $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ تخيليا وكذا يكون مقدار ص وذلك يدل على ان المنحنى لا يمتد جهة الافاق السالبة واذن لا توجد نقطة تحديب ولو أن $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ فى النقطة الاصلية غير محدود وستعرف بالاثر أن النقطة الاصلية ا (شكل ٧٤) هى من طبقة النقط المسماة بالعكسية ولنشرحها فنقول

(فى النقط العكسية)

١٢٩ اذا امتنع المنحنى عن طريق سيره دفعة واحدة وانقلب على عقبه كانت له نقطة عكسية فاذا تحدبت احدى طبتيه نحو محور الافاق وكانت الطبة الاخرى مقعرة نحوه كما يرى فى (الشكل ٧٤) يقال للانقلاب او الانعكاس من الجنس الاول و يكون هـذا الانعكاس من الجنس الثانى متى كان تقعير هاتين الطبتين فى جهة واحدة كما فى (شكل ٧٥)

١٣٠ ويمتنع المنحنى عن طريق سيره هكذا لان المقادير التى يأخذها افق س فى الجهة الاخرى لنقطة ح العكسية يحدث منها مقادير تخيلية للراسى ص ويلزم ذلك أن يكون $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ محتويا على كمية

جذرية ... مقدار متغير سـ واذا احدث $\frac{\text{و}^2\text{صـ}}{\text{و سـ}^2}$ قبل أن يمتنع

المنحنى عن طريق سيره مقدارين احدهما له اشارة صـ والاخر عكسه فان هذا يدل على وجود طيتين للمنحنى مجتمعتين فى نقطة ح (شكل ٧٤) احداهما نحو المحور الافقى والاخرى مقعرة وبهذه العلامات يمكن الاستدلال على نقطة عكسية من جنس الاول للمنحنى واذا كان العكس

بان كان مقدارا $\frac{\text{و}^2\text{صـ}}{\text{و سـ}^2}$ متحدى الاشارة فالطيتان المجتمعتان فى نقطة ح

(شكل ٧٥) لا يمكن أن يكونا الا متحدين فى جهة التقعير او التحديب ويعلم من ذلك ان الانعكاس فى هذه الحالة يكون من الجنس الثانى

(مثال الاول)

* ١٣١ * تنظر هل يوجد للمنحنى الذى معادلته

$$(\text{صـ} - \text{سـ})^2 = \text{سـ}^5$$

نقط عكسية ولذلك نستخرج من هذه المعادلة

$$\text{صـ} = \text{سـ} \pm \text{سـ}^2 \sqrt{\text{سـ}} \quad \cdots\cdots \quad (٦١)$$

فنشاهد أنه كلما اخذ متغير سـ مقدارا سلبيا احدث لمتغير صـ مقدارا تخيليا واذن يمتنع المنحنى عن طريق سيره فى النقطة الاصلية التى ابعادها سـ = ٠ و صـ = ٠ ولكن هذا غير كاف لتأكيد ايجاد نقطة عكسية فى النقطة الاصلية لانه يحتمل أن لا يوجد فى هذه النقطة الا قوس من منحنى يمتد تقعيره على الدوام فى جهة واحدة كما يكون فى رأس القطع الزايد ولذا ينبغى لمعرفة كون سـ = ٠ يصلح لنقطة عكسية أن يعرف ما يؤول اليه المكرر التفاضلى الذى بدرجة ثانية قرب النقطة الاصلية فيؤخذ

تفاضل معادلة صـ = سـ $\pm \frac{٩}{\text{سـ}^2}$ ثم يقسم الناتج على وسـ فيوجد

$$\frac{و ص}{و س} = ١ \pm \frac{٩}{٧} س^{\frac{٢}{٧}} \qquad (٦٢)$$

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \pm \frac{٩}{٧} \times \frac{٢}{٧} س^{-\frac{٥}{٧}} = \pm \frac{٩}{٧} \times \frac{٢}{٧} \frac{١}{\sqrt[٧]{س^٥}}$$

ويدل ذلك على تقعير المنحنى نحو محور الافقى او تحديبه قريبا من النقطة التي يتنبع عن طريق سيره فيما يزاد افقى هذه النقطة كمية صغيرة ه ... فيجعل $س = ٠ + ه$ أى $س = ه$ ويوضع هذا المقدار في مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ فيحدث

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \pm \frac{٩}{٧} \times \frac{٢}{٧} \frac{١}{\sqrt[٧]{ه^٥}}$$

وحيث ان هذين المقدارين مختلفا الاشارة يستدل بهما على طيتين احداهما (شكل ٧٦) تتحدب نحو محور الافقى والاخرى اليه تتقعر ويعلم من ذلك ان النقطة الاصلية نقطة عكسية من النوع الاول

(المثال الثاني)

١٣٢ . لتكن هذه المعادلة

$(ص - ى)^٢ = (س - ح)^٣$ فيستخرج منها

$$ص = ى \pm \sqrt{(س - ح)^٣} \quad \cdots\cdots \quad (٦٣)$$

واذا جعلنا $س = ح$ يوجد $ص = ى$ لكن اذا اخذ متغير س مقادير اصغر من ح حدث الى متغير ص مقادير تخيلية لانه بوضع $ح - ه$ محل س يوجد $ص = ى \pm \sqrt{- ه^٣} = ى \pm ه \sqrt{- ه}$ وهو مقدار تخيلي ويعلم من ذلك ان المنحنى يتنبع عن طريق سيره في نقطة ح (شكل ٧٤) التي ابعادها ح و ى ولمعرفة كيفية امتداد طيات هذا المنحنى بعد نقطة ح نبدل س بمقدار $ح + ه$ في مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ فيحدث لنا

فا ٢٧

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^2} = \pm\frac{3}{4\sqrt{\text{هـ}}}$$

ويستدل بالاشارة العليا على طيسة ح م المحدبة نحو محور الآفاق والاشارة السفلى على طية ح ق المقعرة نحو المحور المذكور واذن توجد نقطة عكسية من الجنس الاول في ح

(المثال الثالث)

* ١٣٣ * ولنأخذ المنحنى المستدل عليه بمعادلة

$\text{ص} = \text{ح}\,\text{س}^2 \pm \text{ء}\,\text{س}^2\sqrt{\text{س}}$ مثالا فنقول

حيث انه بجعل $\text{س} = 0$ يوجد $\text{ص} = 0$ وبجعل س سالبا يكون ص تخيليا يدرك ان المنحنى يمتنع عن طريق سيره في النقطة الاصلية فنبحث عما يؤول اليه $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^2}$ ولذلك نضع المعادلة السابقة بهذه الصورة

$$\text{ص} = \text{ح}\,\text{س}^2 \pm \text{ء}\,\text{س}^{\frac{5}{2}}$$ فنستخرج منها

$$\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}} = 2\,\text{ح}\,\text{س} \pm \frac{5}{2}\,\text{ء}\,\text{س}^{\frac{3}{2}}$$ و

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^2} = 2\,\text{ح} \pm \frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\,\text{ء}\sqrt{\text{س}}$$

ثم نعطي الى متغير س مقدارا موجبا صغيرا جدا وليكن هـ فجزء $\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\,\text{ء}\sqrt{\text{هـ}}$ من مقدار $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^2}$ يكون اصغر من جزء $2\,\text{ح}$ ويعلم من ذلك ان مقداري $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^2}$ المستدل عليهما بمعادلة

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^2} = 2\,\text{ح} \pm \frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\,\text{ء}\sqrt{\text{هـ}}$$

يكونان

يكونان موجبان وينتج من ذلك انه يوجد في النقطة الاصابة طيتان مقعرتان معا نحو محور الافقات وقد تكون هذه النقطة نقطة عكسية من الجنس الثاني

* ١٣٤ * النقط العكسية ليست الا طبقة من النقط المسماة نقطا مكررة وهي الآتي شرحها

* (في النقط المكررة) *

* ١٣٥ * النقطة التي تجتمع فيها جملة طيات من منحن تسمى نقطة مكررة فان كانت الطيات اثنتين سميت هذه النقطة نقطة مضعفة وان كانت ثلاثة سميت نقطة مثلثة وهلم جرا نظرا لعدة الطيات المجتمعة فيها

* ١٣٦ * لتكن ا (شكل ٧٧) نقطة مضعفة حادثة من طيتي اح و اب المماس بهما اط و اط' فاذا رمزنا لمعادلة منحنى هاتين الطيتين بهذا الرمز $\text{ق}\,(\text{س و ص}) = ٠$ وكانت هذه المعادلة عارية عن الكميات الجذرية كان تفاضلها وهو الكائن بهذه الصورة $\text{ع}\,\text{ء}\text{س} + \text{ح}\,\text{ء}\text{ص} = ٠$ غير محتو على جذر اصلا لانه لم يدخل في هذه الدالة التفاضلية كمية جذرية وينتج من ذلك ان كميات ع و ح تكون كميات غير جذرية هذا ويوجد من المعادلة السابقة

$$\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = -\frac{\text{ع}}{\text{ح}} \quad \cdots\cdots \quad (٦٤)$$

ويجب أن يكون للمكرر $\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}}$ التفاضلي مقداران مختلفان حيث انه يوجد خطان مماسان ويلزم أن تتعين $\frac{\text{ع}}{\text{ح}}$ بواسطة هذا الشرط وذلك يكون متى اشتمل $\frac{\text{ع}}{\text{ح}}$ على جذر لكن ذلك غير ممكن لان $\frac{\text{ع}}{\text{ح}}$ غير جذري ففي هذه الحالة يلزم أن يكون $\frac{\text{ع}}{\text{ح}}$ ايلا الى هذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ لان هذه الصورة غير متعينة فتحقق بجملة مقادير كما يعلم من الجبر

* ١٣٧ * وها هي كيفية اثبات هذه القضية

نوس ث آ ، أ يين مقادرى خلى الروتين الرتعتين بين عماس طرية الآن ديرية غبون الوفق من الدزمات تحقق هذه المقادير معادلة

$$\text{ح} + \text{ك}\,\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = ٠$$

بوضع اى منها بدل $\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}$ ويوجد حينئذ

$$\text{ح} + \text{ك}\,\text{اَ} = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{ح} + \text{ك}\,\text{اً} = ٠$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$\text{ك}\,(\text{اَ} - \text{اً}) = ٠$$

ولما كان مضروب اَ − اً يتركب من كميتين غير متساويتين وهما اَ و اً فلا يكون صفرا ولتحقيق المعادلة الاخيرة يجب أن يكون ك = ٠ وبهذا تؤول معادلة ح + ك اَ = ٠ الى ح = ٠ وتؤول معادلة ح + ك $\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}$ = ٠ أو وهو الاولى

$$\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = -\frac{\text{ح}}{\text{ك}} \quad \text{الى} \quad \frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = \frac{٠}{٠}$$

* ١٣٨ * اذا كان بدل الطيتين المجتمعتين فى نقطة واحدة جملة طيات يكفى أن تعتبر اثنتان منها فقط ولا بدل أن تتقاطع جميع الطيات فى ملتقى هاتين الطيتين يجب أن يكون $\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = \frac{٠}{٠}$

ولنتأمل انه متى وجدت جملة طيات من منحنى لها مماس مشترك كانت هذه الطريقة عاجزة عن التوصيل الى نواتج كالسابقة لكن يجب أن يكون فى هذه المسألة ايضا المكرر $\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}$ التفاضلى ممكن الايلولة الى هذه الصورة $\frac{٠}{٠}$

وحيث

هذه القضية ... على ... ت ... شرحه

) ... على ... ت ... اتصا ... قامه

* من ... (...) مؤسس على خلو

من ... من غير

بندور ... على ...

= . كما يظهر ... من معادلة (١٣١) فان ...

في ... (٦٢) الى :

= . ولكن ترول لى $\frac{\text{ و}'\text{ص}}{\text{و}'\text{س}}$ = ١

* وبالجملة فلننضم الى ما ذكر أن معادلة $\frac{\text{ و}'\text{ص}}{\text{و}'\text{س}}$ = .

دود النقطة ال... ثابتة مستلزمة ...

لى انه يلزم من وجود هذه المعادلة وجود ... وانما يلزمه

تبين فقط احتمال وجود نقطة مكررة في المنحنى المفروض

* وماذكر يكفي لبيان طريقة معرفة هل يمكن أن توجد

... عليه بمعادلة مفروضه نقط مكررة اولا وانما ... ان

... ون ع = . ثم يؤخذ تفاضلها فيوجد

ع/ص = .

مقادير س و ص ... معادلتى ع = . و ... = .

... ضة اولا فان كان ذلك كان هذا دليلا على احتمال وجود

... ة في المنحنى يستدل على بعديها بمقدارى س و ص

... عن كيفية المنحنى حول هذه النقطة فبهذا البحث يتحقق

... لة مكررة

(فى النقط المزدوجة)

* ١٤٢ * النقطة التى تطابق لبعدين حقيقيين فى الجزء الذى تكون فيه ابعاد المنحنى المفروض كلها تخيلية ماعدا هذين البعدين الاثنين تكون لاشعة منفصلة بالكلية عن المنحنى ومن اجل ذلك يقال انها نقطة منفصلة او مزدوجة نظرا لازدواج بعديها الحقيقيين المحصورين بين ابعاد تخيلية

ولنرمز الآن بالرمز ص = د س لمعادلة منحن مشتمل على نقطة مزدوجة ولتكن ابعاد هذه النقطة ح و ب فيلزم أن تكون الابعاد حول هذه النقطة تخيلية والا لم تكن منفصلة ويفهم من ذلك انه اذا زاد ﺍﻟ ح كمية صغيرة جدا ولتكن هـ كان الرأسى المطابق لذلك د(ح + هـ) تخيليا لكن يحدث من متسلسلة تيلور فى العموم

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ})=\text{ص}+\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}\,\text{هـ}+\frac{\text{وَ}^{2}\text{ص}}{\text{وَس}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}+\frac{\text{وَ}^{3}\text{ص}}{\text{وَس}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{1\times 2\times 3}+\text{الخ}$$

فاذا جعلنا فيها س = ح كان الرأسى الموافق وهو ص ايلا الى ب وبناء عليه يتغير فى هذه المتسلسلة ص بكمية ب ويرمز بهذه الرموز

$$\left(\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}\right)\ \text{و}\ \left(\frac{\text{وَ}^{2}\text{ص}}{\text{وَس}^{2}}\right)\ \text{و}\ \left(\frac{\text{وَ}^{3}\text{ص}}{\text{وَس}^{3}}\right)+\cdots\ \text{الخ}$$

لما تؤول اليه المكثرات التفاضلية فى هذه الحالة فيوجد

$$\text{د}(\text{ح}+\text{هـ})=\text{ب}+\left(\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}\right)\text{هـ}+\left(\frac{\text{وَ}^{2}\text{ص}}{\text{وَس}^{2}}\right)\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}+\cdots\ \text{الخ}$$

ولاجل أن تكون د(ح + هـ) كمية تخيلية يلزم بالاقل أن تكون احدى كميات

$$\left(\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}}\right)\ \text{و}\ \left(\frac{\text{وَ}^{2}\text{ص}}{\text{وَس}^{2}}\right)\ \text{و}\ \left(\frac{\text{وَ}^{3}\text{ص}}{\text{وَس}^{3}}\right)\cdots\ \text{الخ تخيلية}$$

يعنى ان فرضية س = ح + هـ تجعل احدى المكثرات التفاضلية

ئيلة الى صفر فاذا وقع هـذا الشرط كان وجود النقطة المزدوجة فى المنحنى محتملا ولتكن هذه المعادلة $ص = \pm (س + —)\sqrt{س}$ مثـلا فيؤخذ تفاضلها فيوجد

$$\frac{وص}{وس} = \pm \left(\frac{٣}{٢}\sqrt{س} + \frac{}{٢\sqrt{س}} \right)$$

وحيث ان هذا المقدار يؤول الى كمية تخيلية متى يجعل $س = — —$ ويؤول مقدار $ص$ الى $ص = ٠$ يعلم من ذلك ان نقطة ا التى ابعادها $س = — —$ و $ص = ٠$ (شكل ٧٨) يحتمل أن تكون نقطة مزدوجة وتعرف كون هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق باضافة كمية اصغر من — على بعد — — وكذا بطرح هذه الكمية من — — على الولا فاذا فعلنا هكذا وجدنا فى هاتين الحالتين مقدارين تخيليين لمتغير $ص$ وبهذا نستدل على ان هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق

* ١٤٣ * النقط المزدوجة كالنقط المكررة يحتمل وجودها فى المنحنى متى آل مكرر $\frac{وص}{وس}$ التفاضلى الى : لانه اذا اخذ تفاضل معادلة

$$ك \frac{وص}{وس} + ح = ٠$$ وقسم الناتج على $وس$ يوجد

$$ك \frac{و^٢ص}{وس^٢} + \frac{وص}{وس}\frac{وك}{وس} + \frac{وح}{وس} = ٠$$

ويرى ان مكرر الحد المتبوع بكمية $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ هو ك فاذا اخذ التفاضل مرة اخرى شوهد أن ك تكون مكرر المعادل المحتوى على $\frac{و^٣ص}{وس^٣}$ ايضا وهكذا يعنى انه متى وصل الى المكرر التفاضلى الذى درجته ن يوجد ناتج بهذه الصورة

$$\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{و س}^{\text{ن}}} \div = ٠ \quad (٦٥)$$

وبناء على ذلك لا يوجد بالاقل احد المكررات التفاضلية الاولى كمية نهائية بتمرير باخذه متغير س ومن ثم يكون هذا المكرر التفاضلي محتويا على كمية لانهائية واذا رمزنا لهذا المكرر التفاضلي برمز $\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{و س}^{\text{ن}}}$ لزم ان يكون بالنسبة س يعدد هذه الكمية اكبر من مقدار واحد وذلك يكفي لان ينتج منه كما في بند (١٣٧) ان ك = ٠ وتؤول معادلة

$$\text{ح} + \text{د ك} \frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٠ \quad \text{بهذا المقدار}$$

الى ح = ٠ وينبني على ذلك ان يكون

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \div$$

(في المماسات الاتصاقية)

* ١٤٤ * لتكن ص = د س و ص = ك س معادلتا منحنيين يتقاطعان في نقطة م التي ابعادها ا ح = سَ و ح م = صَ (شكل ٤ ٢) فيوجد لا محالة لاجل هذه النقطة

$$\text{د سَ} = \text{ك سَ}$$

واذا فرضنا ان سَ تصير بعد ذلك سَ + هـ احدثت المعادلتان السابقتان

$$\text{م ع} = \text{د (سَ + هـ)} = \text{د سَ} + \frac{\text{و د سَ}}{\text{و س}}\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{د سَ}}{\text{و س}^{٢}}\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \cdots \text{الخ} \quad (٦٦)$$

$$\text{م عَ} = \text{ك (سَ + هـ)} = \text{ك سَ} + \frac{\text{و ك سَ}}{\text{و س}}\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ك سَ}}{\text{و س}^{٢}}\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ} \quad (٦٧)$$

فاذا

فاذا تطابقت او اتحدت جميع الحدود المتناظرة في الحلين كان المنحنيان المفروضان منطبقين على بعضهما واما اذا كان $\text{كَ سَ} = \text{د سَ}$ فقط فلا تكون لهذين المنحنيين الا نقطة واحدة مشتركة وهي م كما عرفته

وان وجد $\text{كَ سَ} = \text{د سَ}$ و $\frac{\text{و كَ سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}}$ معا فان المنحنيين يتقاربان من بعضهما زيادة ويعظم تقاربهما ويشتد متى كان

$\frac{\text{و}^2\text{ كَ سَ}}{\text{و سَ}^2} = \frac{\text{و}^2\text{ د سَ}}{\text{و سَ}^2}$ زيادة على المعادلات المتقدمة وهلم جرا لان الفرق بين كيتي مً حَ و مَ حَ يقل كلما كثرت الحدود المتساوية في الحلول المطابقة لهما

ولتكن بناء على ذلك ح و و و ر ..... الخ ثوابت معادلة $\text{ص} = \text{كَ س}$ فيمكن أن تأخذ هذه الثوابت مقادير اما من غير أن يتغير جنس المنحنى لان معادلة $\text{ص}^2 = \text{م س} + \text{ن س}^2$ مثلا التي يستدل بها على قطع ناقص لا تنتفي الدلالة بها على القطوع الناقصة حين تأخذ ثابتتا م و ن اى مقدارين لان صورة المعادلة لا تختلف (بناء على عدم تغيير اشارتي م و ن وعدم اخذهما مقادير صفر)

ويمكن من بعد ذلك نظر ثوابت ح و و و ر ... الخ الداخلة في معادلات

$$\text{صَ} = \text{كَ سَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و كَ سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{ كَ سَ}}{\text{و سَ}^2} = \frac{\text{و}^2\text{ د سَ}}{\text{و سَ}^2} \quad \text{.. الخ}$$

كثوابت حيث ما اتفقت أعني اختيارية وبأخذ عدة من هذه المعادلات كعدة ما يوجد فيها من الثوابت تتعين تلك الثوابت بالشرط الذي تكون به هذه المعادلات متحققة مثلا اذا لم تحتو معادلة $\text{ص} = \text{كَ س}$ الا على ثوابت ح و و و ر الثلاث يوضع

$$\text{كَ سَ} = \text{د سَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و كَ سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{ كَ سَ}}{\text{و سَ}^2} = \frac{\text{و}^2\text{ د سَ}}{\text{و سَ}^2}$$

ويستخرج من هذه المعادلات مقادير ح و و و ر بدلالة سَ و صَ و $\frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}}$ الخ

وبوضع تلك المقادير فى معادلة ص = ى س فتتمتع هذه المعادلة بهذه الخاصية وهى انه متى يغير فيها متغير س بكمية سَ + هـ تكون الثلاث حدود الاولى من الطرف الثانى لمعادلة (٦٧) التى توجد بواسطة قانون تيلور مساوية بالتوالى للثلاث حدود الاول من الطرف الثانى لمعادلة (٦٦) وماذكر بخصوص المعادلة التى لا تحتوى الا على ثلاث ثوابت يمكن تطبيقه على المعادلة التى تحتوى على اكثر من ذلك من الثوابت

* ١٤٥ * ولنأخذ الحالة التى تدل فيها معادلة صَ = ى سَ على خط مستقيم مثلا فتكون تلك المعادلة حينئذ مستعوضة بهذه

ص = ح س + ب ..... (٦٨)

ومعادلات الشرط اللازمة لحذف ثوابت ح و ب تكون

ى سَ = ح سَ + ب و وا ى سَ / وا سَ = ح ...... (٦٩)

وحيث كانت ى سَ تبين الرأسى فى نقطة م للمنحنى الذى معادلته ص = ى س وكانت سَ توافق صَ أمكن تغيير ى سَ بكمية صَ وتؤول معادلات (٦٩) حينئذ الى

صَ = ح سَ + ب و وا صَ / وا سَ = ح

وبحذف ح يوجد

صَ = (وا صَ / وا سَ) سَ + ب

وبوضع مقدار ب المستخرج من هذه المعادلة ومقدار ح فى معادلة (٦٨) التى هى معادلة الخط المستقيم تؤول تلك المعادلة الى

ص − صَ = (وا صَ / وا سَ) (س − سَ) .... (٧٠)

وهذه المعادلة هى معادلة مماس م ط فى نقطة م التى ابعادها

سَ

سَ و صَ (شكل ٥) وستعرف علة تماس هذا المستقيم

* ١٤٦ * ولنعود للقضية السابقة ولعدم التطويل فى العبارة ندع المنحنيات بمعادلاتها فنقول قد رأينا فى بند (١٤٤) انه متى تكون لمنحنيين ص = ء س و ص = ى س نقطة واحدة مشتركة مرموز لابعادها برموز سَ و صَ تكون معادلة هذا الشرط ى سَ = ى سَ وبتعيين ثابتتين لمعادلة ص = ى س بواسطة شروط ى سَ = ء سَ

و (و ى سَ)/(و سَ) = (و ء سَ)/(و سَ) يبتدى هذان المنحنيان فى التقارب

ولنرمز برمز ص = د س لما تؤول اليه ص = ى س بعد ما يوضع فيها مقادير هاتين الثابتتين فمنحنى ص = د س يقال له الالتصاق برتبة اولى لمنحنى ص = ء س وكذا اذا حذفت بموجب المقادير الحيث ما اتفقت الممكن اعطاها للثوابت ثلاث ثوابت من معادلة ص = ء س بواسطة المعادلات الثلاث الآتية اعنى

ى سَ = ء سَ و (و ى سَ)/(و سَ) = (و ء سَ)/(و سَ) و (و² ى سَ)/(و سَ²) = (و² ء سَ)/(و سَ²) (٧١)

ورمز برمز ل س لما تؤول اليه ى س بعد وضع مقادير هذه الثوابت فيها كان منحنى ص = ل س الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى ص = ء س وهو اشد قربا له من الالتصاق الذى برتبة اولى وعلى هذا فقس واذن توجد لاجل الالتصاق النونى الرتبة معادلات

ى سَ = ء سَ و (و ى سَ)/(و سَ) = (و ء سَ)/(و سَ) و (و² ى سَ)/(و سَ²) = (و² ء سَ)/(و سَ²) ... و (وⁿ ى سَ)/(و سَⁿ) =

* ١٤٧ * ولنثبت ان احد الالتصاقين الموجودين بهذه الكيفية اعنى بتغيير ثوابت معادلة واحدة وهو الذى برتبة اقل لايمكن أن يمر بين الالتصاق الآخر وبين المنحنى المنسوب له هذان الالتصاقان ولاجل ذلك

نفرض مثلا ان م ب (شكل ٢٤) يكون منحنى ص = ء س وم ح ودونى معادلته ص = ل س يكون التصاقيه برتبة ثانية ونريد الآن أن نثبت ان الالتصاق ص = د س الذى برتبة اولى لا يمكن ان يمر بين منحنيي م ب و م ح ولذلك نضع سَ + هـ محل س فى هذه المعادلات فيوجد

$$\text{ح مَ أو ء}\,(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ء سَ} + \frac{\text{و ء سَ}}{\text{و سَ}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{ء سَ}}{\text{و سَ}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}$$

$$+ \frac{\text{و}^{3}\text{ء سَ}}{\text{و سَ}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{2\times 3} + \cdots \text{ الخ و}$$

$$\text{ح مً أو ل}\,(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ل سَ} + \frac{\text{و ل سَ}}{\text{و سَ}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{ل سَ}}{\text{و سَ}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}$$

$$+ \frac{\text{و}^{3}\text{ل سَ}}{\text{و سَ}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{2\times 3} + \cdots \text{ الخ و}$$

$$\text{د}\,(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{د سَ} + \frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{د سَ}}{\text{و سَ}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}$$

$$+ \frac{\text{و}^{3}\text{د سَ}}{\text{و سَ}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{2\times 3} + \cdots \text{ الخ}$$

وحيث ان منحنى ص = ل س هو الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى ص = ء س فيكون

$$\text{ل سَ} = \text{ء سَ و } \frac{\text{و ل سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و ء سَ}}{\text{و سَ}} \text{ و } \frac{\text{و}^{2}\text{ل سَ}}{\text{و سَ}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ء سَ}}{\text{و سَ}^{2}}$$

وغير ذلك يوجد بسبب كون منحنى ص = د س هو الالتصاق برتبة اولى لمنحنى ص = ء س هاتان المعادلتان ايضا

$$\text{د سَ} = \text{ء سَ و } \frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و ء سَ}}{\text{و سَ}}$$

... الاول للاختصار

ويمكن وضع الثلاث حلول السابقة هكذا

... في المعادلات ...

$$\text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + \text{ر}\,\text{هـ}^{2} + \text{ق}\,\text{هـ}^{3}$$

$$\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}\,\text{هـ}^{2} + \text{ح}\,\text{هـ}^{3}$$

وحيث كان منحنيا $\text{ص} = \text{د}\,\text{س}$ و $\text{ص} = \text{ل}\,\text{س}$ التصاقيين احدهما برتبة اولى والآخر برتبة ثانية يلزم من ذلك أن تخالف كمية ر مقدار $\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$ يعني انه يكون $\text{ر} < \frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$ أو $\text{ر} > \frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$

فاذا كانت ر اصغر من $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$ وكانت ے هي زيادة $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$ عن ر وجد

$$\text{ر} + \text{ے} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$$

واذا كان الامر بالعكس بان كانت ر اكبر من $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$ كانت كمية ے سالبة فاذا وضع مقدار $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{د}\,\text{سَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$ هذا في مقدار $\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})$

ولوحظ اشتراك المضروب هـ^{2} آلت الثلاث حلول السابقة الى

$$\text{ى}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + (\text{ر} + \text{م}\,\text{هـ})\,\text{هـ}^{2}$$

$$\text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + (\text{ر} + \text{ق}\,\text{هـ})\,\text{هـ}^{2}$$

$$\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + (\text{ر} + \text{ے} + \text{ح}\,\text{هـ})\,\text{هـ}^{2}$$

يمكن جعل هـ صغيرة جدا تكون كمية ے غير المشتملة على هـ اكبر من كميات م هـ و ق هـ التي تميل نحو الصفر فاذا كانت ے موجبة عند ذلك فاقت $\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})$ دالتي $\text{ى}(\text{سَ}+\text{هـ})$ و $\text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ})$ ويعلم من ذلك انه يكون في هذه الحالة $\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})$ أو ح مً (شكل ٢٤) اكبر من ح مَ ومن ح مَ وهذا يبين ان منحنى $\text{ص} = \text{د}\,\text{س}$

المتبين

المتبين بخط م مَ لا يمكن أن يمر بين المنحنيين الآخرين

وكذا لو كانت كمية ـ سالبة فانه يكون د (س ـ هـ) او ح مَ

اصغر من ح مَ ومن ح مَ ويكون حينئذ منحنى م م هو الذى يقرب

من محور الآفاق زيادة فلا يمكن أن يكون محصورا بين الآخرين وهذا

ما أردنا اثباته

* ١٤٨ ـ يمكن الآن أن نبين السبب الموجب ليكون الخط المستقيم (شكل ٥) الذى فى بند (١٤٥) وهو الالتصاق برتبة اولى مماسا بالمنحنى لانه ينتج من القضية السابقة عدم امكان مرور مستقيم آخر بين ذلك الخط المستقيم وبين المنحنى المفروض وهذه هى خاصية المماس للمنحنى

ويقال ان هذا التماس تماس برتبة اولى مع المنحنى وعلى العموم يقال للالتصاق النونى الرتبة مماس بالمنحنى الذى هو التصاق له تماسا نونى الرتبة

ويعلم من ذلك انه متى وجدت بين منحنيين هذه المعادلات الثلاث

$$د س = ك س \quad و \quad \frac{و\, د س}{و س} = \frac{و\, ك س}{و س} \quad و \quad \frac{و^2 د س}{و س^2} = \frac{و^2 ك س}{و س^2}$$

كان لهذين المنحنيين تماس برتبة ثانية ويكون هذا التماس برتبة ثالثة متى توجد زيادة على الثلاث معادلات السابقة هذه المعادلة

$$\frac{و^3 د س}{و س^3} = \frac{و^3 ك س}{و س^3}$$ وقس على هذا

* ١٤٩ * حيث ان معادلة الدائرة التى هى

$$(ص - و)^2 + (س - ر)^2 = نق^2$$

تحتوى على ثلاث ثوابت فيمكننا أن نعين الدائرة التى يكون لها تماس برتبة ثانية مع اى منحنى وليكن م ن (شكل ٣٥) المعلوم المعادلة ولذلك نفرض ان سَ و صَ يكونان بعدى نقطة م من محيط هذه الدائرة فدائرة نصف قطرها يعلم بواسطة معادلة $(صَ - و)^2 + (سَ - ر)^2 = نق^2$ .. (٧٣)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (٧٣) [illegible]

[illegible]

[illegible] (١٣)

[illegible] من معادلات

(٧٤) و (٧٥) و (٧٦) في معادلات (٧٤) ليس الا [illegible]

[illegible] من معادلات (٧٣) و (٧٤) و (٧٥) و (٧٦)

وذلك بزوال [illegible] العلامات من معادلات (٧٣) و (٧٥) و (٧٦)

[illegible] ومع ذلك [illegible] = [illegible]

[illegible] العلامات [illegible]

$$(\text{ص} - \text{و})^2 + (\text{س} - \text{ر}) = \text{ر}^2 \qquad (٧٧)$$

$$(\text{ص} - \text{و}) \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + \text{س} - \text{ر} = ٠ \qquad (٧٨)$$

[illegible]

$$(\text{ص} - \text{د}) = -\frac{\text{و س}}{\text{و ص}} \quad \text{(٧٩)}$$

و [illegible] معادلة [illegible]

$$\text{ص} - \text{د} = \frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}\right)}{\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}} \quad \text{(٨٠)}$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٧٨) يحدث

$$\text{س} - \text{ر} = -\frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}\right)\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}}{\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}} \quad \text{(٨١)}$$

وإذا وضعت مقادير ص − د و س − ر في معادلة (٧٧) حدث

$$\frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}\right)^2}{\left(\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}\right)^2} + \frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}\right)^2 \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}}{\left(\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}\right)^2} = \text{نق}^2$$

وإذا جمعت البسوط توجد لها مضروب مشترك

$$\frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}\right)\left(1 + \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}\right)^2}{\left(\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}\right)^2} = \text{نق}^2$$

وهذه المعادلة تختصر إلى

$$\frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^2}{\text{و س}^2}\right)^3}{\left(\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و س}^2}\right)^2} = \text{نق}^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي يوجد

$$\text{نق} = \frac{\left(1+\frac{\text{وص}^2}{\text{وس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}}$$

* ١٥٠ * تعريف الاشارة متعلق بوضع نق فاذا كان تقعير المنحنى متجها نحو محور الآفاق كان $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ سالبا على ما فى بند (١١٣) ولاجل أن يكون نق عند ذلك موجبا يؤخذ نق باشارة السلب ويوضع

$$\text{نق} = -\frac{\left(1+\frac{\text{وص}^2}{\text{وس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٨٢)$$

لانه متى يتجه تقعير المنحنى نحو محور الآفاق يقوم $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ مقام الكمية السلبية التى اذا وضعت فى مقدار نق جعلته موجبا

* ١٥١ * الدائرة التى اعتبرناها يقال لها الدائرة الالتصاقية ويقال لنصف قطرها نصف قطر الانحناء ويعلم من ذلك انه لا يلزم لايجاد نصف قطر الانحناء لاى منحن الا معرفة معادلة هذا المنحنى لنستخرج منها المعادلات التفاضلية اللازم وضعها فى قانون (٨٢)

واذا لزم انه يوجد المنحنى تحدبه نحو محور الآفاق يجعل مقدار نق متبوعا باشارة موجبة

* ١٥٢ * وقد يرقم مقدار نق احيانا بهذه الصورة

$$\text{نق} = -\frac{\left(\text{وس}^2+\text{وص}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\text{وس}\ \text{و}^2\text{ص}}$$

وهذا

وهذا المقدار يستخرج بسهولة من معادلة (١٢) لانه اذا ضربت مقامات الخطين الموضوعين بين خانقتين ورفعى بخانقتين قوسين الحاصرتين الغلقتين الى آب منهما في قانون ٨٢) ولوحظ ان $\frac{\text{و}\text{س}}{\text{و}\text{س}}$ الكمية وس هي وس٢ يحدث

$$\text{نق} = -\frac{(\text{وَس}^{2} + \text{وَص}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{وَس}^{2}\ \text{وَ}^{2}\text{ص}}{\text{وَس}}} = -\frac{(\text{وَس}^{2} + \text{وَص}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{وَس}\ \text{وَ}^{2}\text{ص}}$$

١٥٣ * ولتطبيق قانون (٨٢) على الامثلة نبحث عن نصف قطر الانحناء للقطع المكافى التام (شكل ٢٦) وهو الذى معادلته

$$\text{س}^{2} = \text{ع}\,\text{ص}$$

ولذلك ناخذ تفاضل هذه المعادلة فيوجد $٢\text{س}\ \text{وَس} = \text{ع}\ \text{وَص}$ ومنه يحدث

$$\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = \frac{٢\text{س}}{\text{ع}} \quad \text{ثم يوجد}$$

$$\frac{\text{وَ}^{2}\text{ص}}{\text{وَس}^{2}} = \frac{٢}{\text{ع}}$$

وبهذا يؤول قانون (٨٢) الى

$$\text{نق} = \frac{\left(١ + \frac{٤\text{س}^{2}}{\text{ع}^{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{٢}{\text{ع}}} = \frac{\left[\frac{٤}{\text{ع}^{2}}\left(\frac{\text{ع}^{2}}{٤} + \text{س}^{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{٢}{\text{ع}}}$$

وباجراء رفع المضروبين الى قوة $\frac{3}{2}$ يوجد

$$\text{نق} = \frac{\frac{٨}{\text{ع}^{3}}\left(\frac{\text{ع}^{2}}{٤} + \text{س}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{٢}{\text{ع}}} = \frac{\left(\frac{\text{ع}^{2}}{٤} + \text{س}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ع}^{2}}{٤}} \quad \dots\dots (٨٣)$$

ولكن مقدار الخط العمودى للقطع المكافى يساوى $\left(\frac{\text{ع}^{2}}{٤} + \text{س}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

فيتقدر [illegible] نصف قطر [illegible] [illegible] حتى

[illegible] عن [illegible] [illegible] وباحث عن نصف قطر

[illegible] + [illegible] المسالة على جميع الخطوط

[illegible] [illegible] يحقق [illegible] جميع المنحنيات

[illegible]

[illegible] يستعمل الدائرة الالتصاقية فى تقدير انحنا اى

[illegible] (شكل ٢٥) لانه اذا رسمنا من هذه النقطة

[illegible] يسارى نصف قطر الانحنا

[illegible] تقوس كقوس من المنحنى لانه يكاد أن ينطبق

[illegible] حيث ان [illegible] يكبر كلما صغر نصف قطره يعلم

من [illegible] كبر انحناء المنحنى وصغره بواسطة صغر نصف قطر

[illegible]

فاذا اعتبرنا مثلا معادلة (٨٣) التى يحدث منها نصف قطر الانحنا للقطع

المكافئ [illegible] يكون فى رأس المنحنى اى فيها س = ٠ مقدار نصف

قطر الانحنا [illegible] نق = [illegible] وحيث انه متى تزداد س على التوالى

تزداد كمية [illegible] يستدل بذلك على ان انحنا القطع المكافئ يأخذ فى النقص

كلما بعد عن رأسه

* ١٥٥ * حيث ان كمية $\frac{و ص}{و س}$ تبين ظل الزاوية التى تقع بين

المماس فى نقطة م (شكل ٢٧) وبين محور الآفاق فمعادلة الخط

العمودى المار بالنقطة التى ابعادها ر و تكون

$$ص - و = - \frac{و س}{و ص} (س - ر)$$

وهذه المعادلة هى كمعادلة (٧٨) التى فيها ر و يبينان بعدى مركز

الدائرة الانتصاقية فيرى من ذلك ان نصف قطر هذه الدائرة هو خط عمودى

على

على المنحنى

* ١٥٦ * اذا رسمنا من جميع نقط منحنى ويكن م م َم ً .. الخ (شكل ٢٨) انصاف اقطار منحنية م و و مَ وَ و مً وً ... الخ احدثت نقط و و وَ و وً .... الخ التى هى مراكز الدوائر الالتصاقية المارة بنقط م و مَ و مً .... الخ خطا منحنيا جميع نقطه توجد تحت قاعدة واحدة داخلة فى معادلة منحنى م مَ مً .... الخ لانه متى يعلم هذا المنحنى تنتج منه مواضع جميع تلك النقط) وذلك المنحنى يعنى المركب من نقط و وَ و وً .. الخ يسمى مفرود منحنى م مَ مً .. الخ ومنحنى م مَ مً .. الخ يقال له الانفراد اذا اعتبر بالنسبة الى المفرود

* ١٥٧ * متى ينتقل من نقطة الى اخرى من المفرود فلا تتغير كمينا س و ص فقط ولكن تتغير ايضا كميات ر و ق و نق معا لان كميتى ر و ق هما على وجه العموم بعدا مركز الدائرة الالتصاقية وحيث ان المفرود متكون من جملة هذه المراكز يعلم ان كميتى ر و ق هما بعد هذا المنحنى يعنى بعدا اى نقطة منه فيتغيران من نقطة الى اخرى من المنحنى وكذا تتغير كمية نق التى هى نصف قطر الدائرة الالتصاقية وتبين بعد اى نقطة من المفرود الى اخرى من الانفراد ومن ثم يكون باخذ تفاضل معادلة (٧٨) بالنسبة الى جميع الحروف [ولا يمكن اخذ تفاضل معادلة (ص ـ و)^2 + (س ـ ر)^2 = نق^2 ومشتقاتها بخلاف ذلك رمايتراءى من العمل بخلاف ذلك فى استنتاج معادلات (٧٥)(٧٦) من معادلة (٧٢) فيجاب عنه انه حيث كانت هذه المعادلة تحتوى على ثابتين غير معينين ر و ق يعين هذه الثوابت بواسطة شرط كون الدوال المبينة بالاطراف الاول لمعادلات (٧٥) و (٧٦) تجعل مساوية للصفر وبدون ذلك لم نكن نستدل على انه يستلزم من وقوع معادلة (٧٢) وقوع معادلات (٧٥) و (٧٦)] وبالقسمة على ءس

$$(ص - و)\frac{ء^2 ص}{ءس^2} + \frac{ءص^2}{ءس^2} - \frac{ءص}{ءس}\frac{ءو}{ءس} + ١ - \frac{ءر}{ءس} = ٠$$

وبطرح معادلة (٧٩) من هذه المعادلة يبقى

$$-\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\;\frac{\text{وو}}{\text{وس}}-\frac{\text{ور}}{\text{وس}}=\cdot$$

ويستخرج من ذلك

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}=-\frac{\frac{\text{ور}}{\text{وس}}}{\frac{\text{وو}}{\text{وس}}}=-\frac{\text{ور}}{\text{وس}}\times\frac{1}{\frac{\text{وو}}{\text{وس}}}$$

وحيث يعلم من بند (٦٧) ان $\frac{1}{\frac{\text{وو}}{\text{وس}}}=\frac{\text{وس}}{\text{وو}}$ يكون

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}=-\frac{\text{ور}}{\text{وس}}\times\frac{\text{وس}}{\text{وو}}$$

ويكون بموجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}=-\frac{\text{ور}}{\text{وو}}$$

واذا وضعنا مقدار $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ هذا في معادلة (٧٨) حدث

$$\text{ص}-\text{و}=\frac{\text{وو}}{\text{ور}}\left(\text{س}-\text{ر}\right)\cdots\cdots(\text{٨٤})$$

* ١٥٨ * قد رأينا في بند (١٥٥) ان معادلة

$$\text{ص}-\text{و}=-\frac{\text{وس}}{\text{وص}}\left(\text{س}-\text{ر}\right)$$

هي معادلة نصف قطر الانحناء المار بالنقطة التي ابعادها س و ص

فبتبديل $-\frac{\text{وس}}{\text{وص}}$ بكمية $\frac{\text{وو}}{\text{ور}}$ لم تزل هذه المعادلة دالة على نصف

قطر

قطر الانحنا المذكور لكن معادلة (٨٤) هي ايضا معادلة المماس المار بنقطة من المفرود ابعادها ر و و [وليتأمل انه حيث كان ر و و رمزا في العموم لبعدى نقطة ما من المنحنى المفرود فمعادلة هذا المنحنى تكون و = ىر ومن ثمة تبين كمية $\frac{\text{ىو}}{\text{ىر}}$ على موجب ما هو مقرر في بند (٧١) الزاوية التي يحدثها المماس في نقطة (ر و) مع محور الآفاق]فيعلم من ذلك ان نصف قطر الانحنا يماس المفرود

* ١٥٩ * حيث كانت المواد الآتية تتعلق بتفاضل القوس لاى منحنى يجب علينا أن نقدم هذه القضية فنقول لتكن كمية ح حَ = هـ ما تفرض زيادتها على أفق اح = س المبين في (شكل ٣١) فاذا وعملنا خط م و موازيا للمحور الآفاق كان وتر م مَ $= \sqrt{\text{م و}^2 + \text{مَ و}^2}$
$= \sqrt{\text{هـ}^2 + \text{مَ و}^2}$

$$\text{ولكن مَ و} = \text{ى}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ى س} = \frac{\text{ىص}}{\text{ىس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{ى}^2\text{ص}}{\text{ىس}^2}\,\frac{\text{هـ}^2}{1\times 2} + \text{الخ}$$

فنضع هذا المقدار في كمية م مَ ونرمز برموز ح_3 و ح_4 و ح_5 .... الخ لمكررات كميات هـ^3 و هـ^4 و هـ^5 ..... الخ ليحدث لنا

$$\text{م مَ} = \sqrt{\text{هـ}^2 + \frac{\text{ىص}^2}{\text{ىس}^2}\,\text{هـ}^2 + \text{ح}_3\,\text{هـ}^3 + \text{ح}_4\,\text{هـ}^4 \cdots\cdots \text{الخ}}$$

وبقسمة الطرفين على هـ يكون

$$\frac{\text{م مَ}}{\text{هـ}} = \sqrt{1 + \frac{\text{ىص}^2}{\text{ىس}^2} + \text{ح}_3\,\text{هـ} + \text{ح}_4\,\text{هـ}^2 + \cdots\cdots \text{الخ}}$$

وبناء على ان القوس الذي يرمز له برمز قو ينطبق على وتره في حالة التحديد يوجد من المعادلة الاخيرة

$$\frac{\text{ىقو}}{\text{ىس}} = \sqrt{1 + \frac{\text{ىص}^2}{\text{ىس}^2}}$$

ويستخرج من ذلك بواسطة ضرب الطرفين في واسطة

و'و = √(و'س^٢ + و'ص^٢) وهو المطلوب

* ١٦٠ * وبهذه الكيفية يوجد لاجل المفرود الذى ابعاده ر و د

و'و = √(و'ر^٢ + و'و^٢)

* ١٦١ * نأخذ الآن تفاضل معادلة (٧٧) بالنسبة لجميع الحروف فيحدث لنا

(ص — و) (و'ص — و'و) + (س — ر) (و'س — و'ر) = نق و'نق

ويحدث من معادلة (٧٨)

(ص — و) و'ص + (س — ر) و'س = ٠

فاذا طرحنا هذا الناتج من المعادلة السابقة بقي لنا

— (ص — و) و'و — (س — ر) و'ر = نق و'نق .... (٨٥)

واذا وضعنا في معادلة (٨٥) هذه وفي معادلة (٧٧) مقدار ص — و المستخرج من معادلة (٨٤) حدث لنا هاتان المعادلتان

(و'و / و'ر) (س — ر) — (س — ر) و'ر = نق و'نق

(و'و^٢ / و'ر^٢) (س — ر)^٢ + (س — ر)^٢ = نق^٢

ولما يوضع س — ر مضروبا مشتركا ويؤخذ الجذر التربيعي للمعادلة الثانية تؤول هاتان المعادلتان الى

— (س — ر) (و'و^٢ + و'ر^٢) / و'ر = نق و'نق

(س — ر) √(و'ر^٢ + و'و^٢) / و'ر = نق

وبقسمة الاولى من هاتين المعادلتين على الثانية يوجد

$$ و'نق = — \sqrt{و'ر^2 + و'ز^2} $$

وحيث انه يوجد فى بند (١٦٠) بان رمز برمز قو القوس من المفروض

$$ و'قو = \sqrt{و'ر^2 + و'ز^2} $$

فاذا طربقت هذه المعادلة بالسابقة حدث من ذلك

$$ و'نق = — و'قو \quad أو $$
$$ و'نق + و'قو = ٠ \quad أو $$
$$ و'(نق + قو) = ٠ $$

وبسبب كون كل دالة تفاضلها صفر هى كمية ثابتة يعلم ان حاصل جمع نق + قو يبين كمية ثابتة وينبنى على ذلك انه بازدياد نصف قطر الانحنا ينقص القوس المرموز له برمز قو بمقدار تلك الزيادة والعكس بالعكس وتشرح هذه القضية بهذه الكيفية وهى ان نصف قطر الانحناء يتغير بفروقات مساوية للفروقات التى تحدث عند تغير القوس من المفروض

* ١٦٢ * ليكن (شكل ٢٩) م و = نق و و ب = قو و م' و' = نق' و و' ب = قو' فيوجد لاجل نصف قطر الانحنا م و

$$ نق + قو = ثابتة \quad أو $$
$$ م و + قوس و ب = ثابتة \quad \cdots\cdots \quad (٨٦) $$

وكذا يوجد لاجل نصف قطر الانحناء م' و' هذه المعادلة

$$ نق' + قو' = ثابتة \quad أو $$
$$ م' و' + قوس و' ب = ثابتة \quad \cdots\cdots \quad (٨٧) $$

وحيث ان الاطراف الثانية لمعادلتى (٨٦) و (٨٧) تبين كمية ثابتة واحدة على ما بينه البند المتقدم يوجد من ذلك

$$ م' و' + قوس و' ب = م و + قوس و ب \quad أو $$
$$ م' و' — م و = قوس و ب — قوس و' ب = قوس و و' $$

ويعلم من ذلك الفرق بين اى نصفى قطرين من انصاف الاقطار الانحنائية يساوى القوس المحصور بينهما أبدا

* ١٦٣ * وينتج من ذلك انه اذا ثنى خيط على المفرود الذى هو وس (شكل ٢٩) وانتهى مماسا به وكان مثبتا فى نقطة م من الانفراد الذى هو م ح ثم نرد هذا الخيط بابقائه مشدودا على الدوام رسم طرفه م فى حركته منحنى الانفراد م ح لانه اذا أتى فى موضع وَمَ بحركته يزداد بقدر قوس ووَ ومن ثمة يساوى فى الطول نصف قطر الانحناء الذى يمر بنقطة و ومنه يفهم ان طرف مَ لهذا الخيط يكون موجودا على المنحنى الانفرادى

* ١٦٤ * وها هى كيفية ايجاد معادلة المنحنى المفرود يستخرج اولا من معادلة المنحنى المراد ايجاد مفروده مقادير ص والمكررات التفاضلية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ و $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ الخ ثم توضع هذه المقادير فى معادلات (٧٨) و(٧٩) فيحدث من ذلك معادلتان مشتملتان على متغير س فيحذف هذا المتغير من بينهما فتنشأ عن ذلك معادلة محتوية على و و ر فتكون هى معادلة المنحنى المفرود المطلوبة

* ١٦٥ * ولنعين بهذه الطريقة مفرود القطع المكافى الذى معادلته $\text{س}^2 = \text{ح ص}$ فنأخذ تفاضل هذه المعادلة ليستخرج منه

$$٢\text{س وس} = \text{ح وص} \quad \text{ومن ثمة} \quad \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{٢\text{س}}{\text{ح}}$$

$$\text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = \frac{٢}{\text{ح}}$$

فتوضع فى معادلات (٧٨) و (٧٩) مقادير ص و $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ و $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ هذه فتحدث المعادلتان المشتملتان على س

$(\frac{\text{س}^2}{\text{ح}}$

$$\left(\frac{س^٢}{ع} - و\right)\frac{٢س}{ع} + س - ر = ٠ \quad \cdots\cdots \quad (٨٨)$$

$$\left(\frac{س^٢}{ع} - و\right)\frac{٢}{ع} + \frac{٤س^٢}{ع^٢} + ١ = ٠ \quad \cdots\cdots \quad (٨٩)$$

ثم تطرح معادلة (٨٨) من معادلة (٨٩) بعد ضربها في س فيبقى

$$ر + \frac{٤س^٣}{ع^٢} = ٠ \quad \cdots\cdots \quad (٩٠)$$

وغير ذلك يوجد بضرب معادلة (٨٩) في $ع^٢$ واختصارها

$$٦س^٢ - ٢ع و + ع^٢$$ ومنه يستخرج

$$و = \frac{٣س^٢}{ع} + \frac{ع}{٢} \quad \cdots\cdots \quad (٩١)$$

وبحذف س من بين معادلتي (٩٠) و (٩١) توجد معادلة المفرود لكن قبل أن تعمل هذه العملية ننبه ان معادلتي (٩٠) و (٩١) يؤولان لاجل النقطة الاصلية التي فيها $س = ٠$ الى $ر = ٠$ و $و = \frac{ع}{٢}$ فاذا أخذ اذن $ا ـ = \frac{ع}{٢}$ (شكل ٣٢) فتوجد نقطة ـ من المفرود ثم يرى بواسطة معادلة (٩١) انه بأخذ متغير س مقادير موجبة او سالبة يزداد متغير و كلما ازدادت هذه المقادير وينتج من ذلك ان المفرود يتركب من طيتين ـح و ـد

* ١٦٦ * ولاجل حذف س من بين معادلتي (٩٠) و (٩١) تربع الاولى بعد أن يستخرج منها $س^٣$ فيوجد

$$س^٦ = ر^٢ \frac{ع^٤}{١٦}$$

ثم يستخرج من معادلة (٩١)

$$س^٢ = \left(و - \frac{ع}{٢}\right)\frac{ع}{٣}$$ وبتكعيب الطرفين يكون

$$س^٦ = \left(و - \frac{ع}{٢}\right)^٣ \frac{ع^٣}{٢٧}$$

وبمساواة مقداري $س^٦$ ببعضهما وقسمة الناتج على $ع^٣$ يوجد

$$ر^٢ \frac{ع}{١٦} = \left(و - \frac{ع}{٢}\right)^٣ \frac{١}{٢٧}$$

واذا رمزنا برمز وَ لكمية $و - \frac{ع}{٢}$ وضربنا طرفي هذه المعادلة في ٢٧ يحدث

$$وَ^٣ = \frac{٢٧}{١٦} ع ر^٢ = ك ر^٢$$

يحول $\text{ب}\;\text{ح} = \text{ح}$ وتنقل النقطة الاصلية حينئذ الى ب حيث ان
$\text{و} = \text{و} - \text{ب}$ (ويعلم بالسهولة كون طرفى ب ح و ب ك يتقعران
نحو محور الآفاق لانه اذا أخذ تفاضل معادلة

$$\text{و}^{3} = \text{ق}^{3}\,\text{ر}^{2} \quad \text{او} \quad \text{و} = \text{ق}\,\text{ر}^{\frac{2}{3}} \quad \text{يوجد}$$

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{و}}{\text{ء}\,\text{ر}^{2}} = -\frac{2}{9}\,\text{ق}\,\text{ر}^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\,\frac{\text{ق}}{\sqrt[3]{\text{ر}^{4}}}$$

وهذا المقدار موجب سواء كانت ر موجبة أو سالبة فيستدل بذلك
على ان كلا من طرفى المنحنى تتقعر نحو محور الآفاق)

* ١٦٧ * وضع الالتصاقى يكون بكيفيتين مختلفتين بالنظر للمنحنى
الواقع بينه وبينه التماس اوليهما أن توجد طرفاه معا فوق المنحنى
كاف (شكل ٣٣) او تحته كاف (شكل ٣٤)
وحينئذ لا يقع بين الالتصاقى والمنحنى الا تماس فقط
وثانيهما أن تكون احدى طرفى الالتصاقى موجودة فوق المنحنى والاخرى
تحته كاف (شكل ٣٥) وفى هذه الحالة يقطع الالتصاقى المنحنى فى نقطة م

* ١٦٨ * تثبت الآن ان الدائرة الالتصاقية تقطع المنحنى (شكل ٣٦)
ولذلك نرمز برمزى ص_{1} و $\text{ص}'_{1}$ لراسيين احدهما وهو الاول موافق
للمنحنى وثانيهما موافق للالتصاقى ونفرض ايضا ان هذين الراسيين يطابقان
لافق واحد وهو س + ه فيوجد

$$\left.\begin{aligned} \text{ص}_{1} &= \text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{د س} + \text{ح ه} + \text{ج}_{1}\,\text{ه}^{2} + \text{ج}_{2}\,\text{ه}^{3} + \ldots \text{الخ} \\ \text{ص}'_{1} &= \text{د}'(\text{س}+\text{ه}) = \text{د}'\text{س} + \text{ح}'\text{ه} + \text{ج}'_{1}\,\text{ه}^{2} + \text{ج}'_{2}\,\text{ه}^{3} + \ldots \text{الخ} \end{aligned}\right\} (٩٢)$$

وحيث كانت الدائرة التصاقية برتبة ثانية يلزم أن تكون الثلاثة حدود
الاول من هذين الحلين متساوية ويعلم من ذلك ان الفرق بين الراسيين المطابقين

لافق

للافق واحد من س + هـ يكون

ر ج — ج′) هـ ا + الخ ...... (٩٣)

وإذا فرضنا ان ت للافق عند س — هـ يلزم تغيير ت هـ بكمية — هـ

فحصل للرسيين فرق هو

— (ج — ج′) هـ ا — الخ ...... (٩٠)

وحيث كان الحد الاول من متسلسلتي (٩٣) و (٩٠) يمكن أن يفوق مجموع الحدود الباقية بأخذ كمية هـ صغيرة على قدر الكفاية ينتج منه ان فضل الرسيين يتغير في اشارته في نقطتي الافق س — هـ بعدها عن س + هـ وينبني على ذلك انه اذا كان فرق الرسيات الموافقة للافق س + هـ كمية موجبة بأخذ (شكل ٣٦) ت ث = ع ع′ = هـ معناها انه اذا كان الرأسي ع م′ للمنحنى يفوق ث ث′ يكون الرأسي ع ع′ للالتصاقي فاقتا الرأسي ع م′ للمنحنى وينتج من ذلك ان الالتصاقي يوجد في احد الوجهين فوق المنحنى وفي الوجه الآخر تحته فاذن يقطعه وهذا ما اردنا بيانه

وماذكر بخصوص الدائرة التي هي التصاقي برتبة ثانية يمكن تطبيقه على جميع الالتصاقيات المزدوجة الرتبة

* ١٦٩ . ويتضح من بعد الاثبات السابق ان كل الالتصاقيات من رتبة مفردة تكون مماسا للمنحنى ولا يتقطعه وهو نتيجة فرض عدا الاثبات السابق

* ١٧٠ . ولنذكر قضية نوعوديا ثبتها في بند (١٧٠) عن النقط المذكورة على ما هو مشروح في بند (١٣٨) فنقول اذا كانت المنحنيات المجتمعة في احدى هذه النقط لها مماس مشترك ولتكن معادلته ص = ح س + د تغير ص بكمية ح س + د في نهاية معادلتي (٩٠) فيحدث من ذلك $\frac{و ص}{و س}$ او ح = ح وجميع المؤثرات الاخر لهذه المعادلة تكون صفرا وبسبب كون المماس التصاقيا برتبة

أولى تساوى كمية د س + ح ه كمية ى س + حَ ه وبذلك يؤول
فرق معادلتى (٩٢) الى

$$ص - صَ = أ\,ه + أ\,ه^{٢} + \dots\dots \text{ الخ}$$

وفرق الراسين هذا يلزم أن يوجد له مقداران كم و كمَ (شكل ٣٠)
ولذلك يجب أن يكون لاحد المكررات التفاضلية المتبينة بهذه الرموز

أ و أ ...... الخ مقداران وليكن $\frac{و^{ن} ص}{و س^{ن}}$ هو هذا المكرر

التفاضلى لكن حيث انه اذا أخذت التفاضلات المتوالية لمعادلة ع و س + ك و ص = ٠ لايزال حد ك باقيا مضروبا فى التفاضل برتبة عليا لكمية ص فى كل تفاضل فعل على ماقرر فى بند (١٤٣) يعلم من ذلك ان التفاضل برتبة ن للدالة المفروضة يمكن وضعه هكذا

ك $\frac{و^{ن} ص}{و س^{ن}}$ + ع١ = ٠ ويلزم أن يوجد للمكرر $\frac{و^{ن} ص}{و س^{ن}}$ التفاضلى

مقداران ويثبت ان كمية ك تكون صفرا كما فى بند (١٣٧) وبمقدار ك

هذا يؤول مقدار ع الى صفر ايضا وتؤول معادلة $\frac{و ص}{و س} = -\frac{ع}{ك}$.

حينئذ الى $\frac{و ص}{و س} = \frac{٠}{٠}$ وهو المراد اثباته

(تطبيق قضية تيلور على الدوال المتزايدة التى بمتغيرين)

* ١٧١ * متى يتغير فى دالة ع المشتملة على متغيرين س و ص غير المرتبطين متغير س بكمية س + ه ومتغير ص بكمية ص + ك يمكن حل هذه الدالة بواسطة قضية تيلور لانه اذا استبدلت اولا كمية س بكمية س + ه يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}\,،\,\text{ص})=\text{ع}+\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{هـ}+\frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{ع}}{\text{وس}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{٢\times٣}+\cdots\text{الخ}\cdots \quad (٩٥)$$

وكمية هـ توجد لا محالة في هذا الحل و ص لا تدخل الا في دوال

$$\text{ع}\ \text{و}\ \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\ \text{و}\ \frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}\ \text{و}\ \frac{\text{و}^{٣}\text{ع}}{\text{وس}^{٣}}\ \cdots\cdots\ \text{الخ}$$

فاذا غيرت ص بكمية ص + ك في هذه الدوال لزم أن تتغير في معادلة (٩٥)

$$\text{ع بكمية ع}+\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وص}^{٢}}\,\frac{\text{ك}^{٢}}{٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{ع}}{\text{وص}^{٣}}\,\frac{\text{ك}^{٣}}{٢\times٣}+\cdots\text{الخ}$$

$$\text{و}\ \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\ \text{بكمية}\ \frac{\text{وع}}{\text{وس}}+\frac{\text{و}.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{٢}.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}^{٢}}\,\frac{\text{ك}^{٢}}{٢}+\frac{\text{و}^{٣}.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}^{٣}}\,\frac{\text{ك}^{٣}}{٢\times٣}+\cdots\text{الخ}$$

$$\text{و}\ \frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}\ \text{بكمية}\ \frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}+\frac{\text{و}.\frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}}{\text{وص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{٢}.\frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}}{\text{وص}^{٢}}\,\frac{\text{ك}^{٢}}{٢}+\frac{\text{و}^{٣}.\frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}}{\text{وص}^{٣}}\,\frac{\text{ك}^{٣}}{٢\times٣}+\cdots\text{الخ}$$

الخ و الخ و الخ و الخ

وترقم سطور بقدر ما في معادلة (٩٥) من الحدود فيوجد

$$\left.\begin{aligned}
&\text{د}(\text{س}+\text{هـ}\,،\,\text{ص}+\text{ك})=\text{ع}+\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وص}^{٢}}\,\frac{\text{ك}^{٢}}{٢}+\text{الخ}\\
&+\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{هـ}+\frac{\text{و}.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}}\,\text{هـ ك}+\text{الخ}\\
&+\frac{\text{و}^{٢}\text{ع}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}+\text{الخ}\\
&+\text{الخ}
\end{aligned}\right\}\ (٩٦)$$

١٧٦ [illegible] تبدل بوجه معاكس [illegible] ازلا بتغير
ص [illegible] ص [illegible]

$$\text{د}(\text{س}، \text{ص}+\text{ك}) = \text{ع} + \frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\text{ك} + \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و ص}^{2}}\cdot\frac{\text{ك}^{2}}{2} + \frac{\text{و}^{3}\text{ع}}{\text{و ص}^{3}}\cdot\frac{\text{ك}^{3}}{2\times 3} + \cdots \text{الخ}$$

ثم نعوض بوضع س + ه بدل س في كل حد الى هذا الناتج

$$(٩٧)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{د}(\text{س}+\text{ه}، \text{ص}+\text{ك}) = \text{ع} + \frac{\text{و ع}}{\text{و س}}\text{ه} + \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}\cdot\frac{\text{ه}^{2}}{2} + \cdots \text{الخ} \\ \qquad + \frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\text{ك} + \frac{\text{و}\cdot\frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}}{\text{و س}}\text{ه ك} + \cdots \text{الخ} \\ \qquad + \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و ص}^{2}}\cdot\frac{\text{ك}^{2}}{2} + \cdots \text{الخ} \\ \qquad + \cdots \text{الخ}\end{array}\right.$$

وحيث كان الترتيب الذي فعلت به هذه التبديلات بالاختيار لانه يجب وضع س + ه في جميع الحالات التي تدخل فيها س ووضع ص + ك في جميع المواضع التي تدخل فيها ص فلا تؤثر هذه العمليات على بعضها ومنه ينتج وجوب تطابق حلى (٩٦) و (٩٧) وعليه ينبغي اتحاد مقادير الحدود المتبوعة بعوامل ضروب متحدة في ه و ك فاذا ساوينا الحدود المضروبة في ه ك ببعضها نجد

$$\frac{\text{و}\cdot\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}}{\text{و ص}} = \frac{\text{و}\cdot\frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}}{\text{و س}}$$

او وهو الاولى

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س و ص}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و ص و س}}$$

ويفهم من هذه المعادلة ان ترتيب التفاضل في اخذ التفاضل الثاني لحاصل

ضرب

ضرب متغيرين اى دالة بمتغيرين اختيارى ويعرف بذلك ترتيب
المكررات التفاضلية بوجهة عليه مو اختيارى بمساواة المكررات التفاضلية
الحدود الاخر من معادلتى (٩٦) و (٩٧) ببعضها يعلم

«فى نهايات كبرى وصغرى لدوال ذى متغيرين»

١٧٢ ، قد رأينا فى بند (١٧١) انه اذا غير س بكمية
س + هـ ومتغير ص بكمية ص + ك فى الدالة المشتملة
على متغيرى س وص غير المرتبطين يحصل د (س + هـ و ص + ك)
بمعادلة (٩٦) فاذا بينا د (س + هـ و ص + ك) فى هذه المعادلة

برمز عَ و ك برمز م هـ و $\frac{و\,ع}{و\,س}$ برمز ... $\frac{و^{2} ع}{و\,س\,و\,ص}$ نجد

$$عَ = ع + هـ\left(\frac{و\,ع}{و\,ص}م + \frac{و\,ع}{و\,س}\right) + \frac{هـ^{2}}{٢}\left(\frac{و^{2} ع}{و\,ص^{2}}م^{2} + ٢\frac{و^{2} ع}{و\,س\,و\,ص}م + \frac{و^{2} ع}{و\,س^{2}}\right)$$

+ الحدود المحتوية على $هـ^{3}$ و $هـ^{4}$ و .. الخ .. (٩٨)

ولاجل أن تكون ع نهاية كبرى او صغرى يلزم أن تجعل بعض المقادير
المعطاة الى هـ و ك كمية عَ اكبر من ع ابدا او اصغر منها ابدا

ولا يتيسر ذلك الا اذا كان حد $هـ\left(\frac{و\,ع}{و\,ص}م + \frac{و\,ع}{و\,س}\right)$ صفرا لانه اذا لم يكن

كذلك امكن صيرورة هذا الحد اكبر من حاصل جمع جبرى لجميع الحدود
التى تليه بواسطة صغر القيم كمية هـ كما فى بند (١٩) ويأخذ هذا
الحد على التعاقب موجبا وسالبا بالتغيير ... فى حدى ... احداهما اكبر من كمية
ع وفى الاخرى اصغر منها ويعلم حينئذ انه لا تكون دالة ع هذه نهاية كبرى
ونهاية صغرى يلزم ان يوجد

$$هـ\left(\frac{و\,ع}{و\,ص}م + \frac{و\,ع}{و\,س}\right) = ٠ \;...$$

$$\frac{\text{واع}}{\text{واص}}\,\text{م} + \frac{\text{واع}}{\text{واس}} = ٠$$

وحيث كانت الزيادة ك حيث ما اتفقت تكون م كذلك ولا تزال المعادلة حينئذ واقعة مهما كانت م وذلك يقتضى أن تنقسم هذه المعادلة الى هاتين

$$\frac{\text{واع}}{\text{واص}} = ٠ \quad \text{و} \quad \frac{\text{واع}}{\text{واس}} = ٠$$

* ١٧٤ * نبحث الآن عما يميز النهاية الكبرى من الصغرى ولذلك ننبه انه حيث كان الحد المشتمل على هـ صفرا فالحد المحتوى على $\text{هـ}^{٢}$ يكون هو الممتنع باشارة حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود التى تأتى بعد ع ويلزم حينئذ أن الحد المشتمل على $\text{هـ}^{٢}$ ان كان غير صفر لا يكون متعينا بواسطة مقادير هـ و ك موجبا تارة وسالبا أخرى والا لكانت $\text{ع}_{١}$ فى احدى الحالتين اصغر من ع وفى الحالة الاخرى اكبر منها وحيث كان الامر كذلك فنشرع فى البحث عن الشرط اللازم وقوعه ليحفظ الحد المشتمل على $\text{هـ}^{٢}$ اشارة واحدة مهما كانت المقادير المعطاة الى كميتى هـ و ك وفى هذا المبحث نبين الحد المحتوى على $\text{هـ}^{٢}$ من معادلة (٩٨) بهذا الرمز

$$\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٢}\left(\text{ح}\,\text{م}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{م} + \text{ع}\right)$$

وبوضع ح مضروبا مشتركا يؤول هذا الحد الى

$$\frac{١}{٢}\,\text{ح}\,\text{هـ}^{٢}\left(\text{م}^{٢} + ٢\,\frac{\text{س}}{\text{ح}}\,\text{م} + \frac{\text{ع}}{\text{ح}}\right) \cdots\cdots (٩٩)$$

وباضافة كمية $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ح}^{٢}}$ التى مقدارها صفر على ما بين الحافظتين يمكن وضع كمية (٩٩) هكذا

$$\frac{١}{٢}\,\text{ح}\,\text{هـ}^{٢}\left[\left(\text{م} + \frac{\text{س}}{\text{ح}}\right)^{٢} + \frac{\text{ع}}{\text{ح}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ح}^{٢}}\right] \cdots (١٠٠)$$

ويرى انها تكون باشارة ح متى اتحد ع و ح فى الاشارة وكان $\frac{\text{ع}}{\text{ح}} > \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ح}^{٢}}$ يعنى $\text{ع}\,\text{ح} > \text{س}^{٢}$ لان الكمية المضروبة فى $\frac{١}{٢}\,\text{ح}\,\text{هـ}^{٢}$ حينئذ

تكون

تكون موجبة واشارة كمية (١٠٠) تتعلق باشارة ح واذن توجد نهاية كبرى اونهاية صغرى بحسب كون ح سالبة أوموجبة يعنى بحسب اشارة $\frac{و'ع}{و'ص^٢}$ المتحدة مع اشارة $\frac{و'ع}{و'س^٢}$ حيث انه شوهد أن ع و ح يفرضان باشارة واحدة

(فى تحويل الاحداثيات المستقيمة الى احداثيات قطبية)

* ١٧٥ نعتبر منحنى سدح (شكل ٧٩) المتعين فيه موضع نقطة م بواسطة الاحداثيات المستقيمة اع = س و مع = ص وهذه النقطة يمكن تعيينها كذلك اذا علمت زاوية م ا ح والمسافة قطر الاحتراق ام ولما كانت الزوايا تقاس بالاقواس عادة تستبدلت زاوية م ا ح بقوس م َو المرسوم بنصف قطر مأخوذ وحدة ويسمى عندئذ استعواض الاحداثيات القطبية التى هى مَو = ـــ و ام = ر بالاحداثيات المستقيمة اع = س و مع = ص

* ١٧٦ ويتأمل ان مبدأ الآفاق قد يكون بعض الاوقات غير نقطة و لانه يمكن تعيين نقطة م كذلك اذا اعتبرت نقطة وَ نقطة الابتداء وعلم قوس وَمَ ونصف قطر ام الاحتراق وفى هذه الحالة يمكنا أن نرمز لقوس وَمَ برمز ـــَ وحينئذ ... الآفاق ... من المبدأ و تختلف عن الآفاق المحسوبة ... وَ ... هى وو َ وتوجد بينها ... الآفاق ... هذه المعادلة

ـــ = ـــَ ـــ وو َ

وحيث انه يمكن بواسطة هذه المعادلة تغيير المبدأ بما يناسب نفرض ان هذا المبدأ يكون و لاجل السهولة

* ١٧٧ ولنكن الآن د(س و ص) = ٠ المعادلة التى يرد أن تتغير فيها الاحداثيات المستقيمة اع = س و عم = ص بالاحداثيات القطبية وم َ = ـــ و ام = ع فنبحث عن

... مثلث ... لاحداثيات وذلك بمثلث ام ح

ح م = ع جتا ح ام و ح م = ام جا ح ام أو

س = ع جتا ى و ص = ع جا ى ....(١٠١)

وينبغي حينئذ وضع هذه المقادير في معادلة د(س و ص) = ٠

فتحدث المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه

* ١٧٨ * نقل نقطة الاصل للاحداثيات المستقيمة س و ص

بست في مركز ا نسمى (شكل ٨٠) وكانت ر و و الاحداثيات

لمركز ا و سَ و صَ الاحداثيات المنسوبة من ا حدث

اح = آب − آء و م ح = م ك − اء

أو س = سَ − ر و ص = صَ − و

ويلزم وضع هذه المقادير في القوانين السابقة

* (في تحويل الاحداثيات القطبيه الى اخرى مستقيمة وتعيين الكمية التفاضلية لقوس في منحن قطبي) *

* ١٧٩ * المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه بينها

د(ى , ع) = ٠

ويشاهد بلا كلفة (شكل ٧٩) انه يمكن ابدال ع بمقدارها المستخرج

من معادلة

ام² = اح² + حم² أو

ع² = س² + ص² ..... (١٠٢)

وبالنظر الى ى نقسم معادلتي (١٠١) على بعضهما فيوجد

ص/س = جا ى/جتا ى = ظا ى ويستخرج من ذلك

ى = قوس (ظا = ص/س)

وبوضع مقدار ى هذا مع مقدار ع في معادلة

د(ى , ع) = ٠ يوجد

د[قوس (ظا = ص/س) , √(س² + ص²)] = ٠ ....(١٠٣)

وهذه

وهذه معادلة مشتملة على س و ص و [illegible]

* ١٨٠ * [illegible] س و ص [illegible]

على [illegible] التى [illegible] ص = [illegible] [illegible]

مشتملة على كميات تفاضلية و[illegible] تشتمل [illegible] (١٠٢)

ونستعمل الطريقة الآتية حيث [illegible] هى [illegible] [illegible]

د(ع و ى) = ٠ [illegible] معادلة ذات [illegible]

مستقيمة س و ص والسبب الموجب [illegible] حذف ى

من بين معادلة د(ى و ع) = ٠ [illegible] بمعادلة [illegible]

د(ى و ع و وى و وع) = ٠ [illegible] ع [illegible]

بيانه على موجب بند (١٧٩) بتغيرى س و ص بدون كمية

علية ولا يمكن بيان مقدار ى [illegible] وبالحقيقة متى تحذف [illegible]

تكون المعادلة الحادثة مشتملة على وى و وع [illegible]

يمكن بيانها بدلالة متغيرات س و ص و وس و وص

هذا وتستخرج من معادلة (١٠١)

جتا ى = س/ع و جا ى = ص/ع .... (١٠٤)

وتقسم احدى هاتين المعادلتين على الاخرى فيوجد

جا ى / جتا ى أو ظا ى = ص/س ثم نأخذ تفاضل الطرفين فيوجد

وى / جتا² ى = (س وص ــ ص وس) / س²

ونبدل ١/جتا² ى بمقداره المستخرج من المعادلة الاولى من معادلتى (١٠٤)

ثم نسقط القاسم المشترك س² فينشأ عن ذلك

ع² وى = س وص ــ ص وس ومنه يستخرج

وى = (س وص ــ ص وس) / ع² .... (١٠٥)

وبوضع مقدار ع عوضاً عنه فى هذه المعادلة الاخيرة يكون

$$و ى = \frac{س و ص - ص و س}{س^٢ + ص^٢}$$

وتفاضل المتغير الآخر يوجد ايضاً باعظم سهولة لانه يحدث من معادلة (١٠٢)

ع = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ وبأخذ التفاضل يوجد

$$و ع = \frac{س و س + ص و ص}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$$

وبواسطة مقادير و ى و و ع و ع السابقة تتغير المعادلة الحادثة من حذف ى بمعادلة اخرى لا تحتوى الا على س و ص و و س و و ص واذن تنتسب الى احداثيات مستقيمة وتكون هى المعادلة المبحوث عنها

* ١٨١ * قد رأينا فى بند (١٠٩) ان كمية تفاضل القوس المرموز له برمز قو المنسوب الى احداثيات مستقيمة هى

$$و قو = \sqrt{و س^٢ + و ص^٢} \quad \cdots\cdots \quad (١٠٦)$$

فيمكن تعيين تفاضل هذا القوس متى تكون الاحداثيات قطبيه وفى هذه الحالة توضع فى معادلة (١٠٦) مقادير و س و و ص المستخرجة من معادلات

س = ع جتا ى , ص = ع حا ى

ويوجد باخذ تفاضل هذه المعادلات

$$و س = - ع حا ى و ى + جتا ى و ع$$
$$و ص = ع جتا ى و ى + حا ى و ع$$

فتربع هذه المعادلات ونختصرها بمساعدة معادلة

حا^٢ ى + جتا^٢ ى = ١ فينشأ عن ذلك

$$و قو = \sqrt{ع^٢ و ى^٢ + و ع^٢}$$

وهو تفاضل القوس بدلالة الاحداثيات القطبية

(في تحت المماس وتحت العمودي والعمودي والمماس المنحنيات القطبية)

• ١٨٢ • حقيقة تحت المماس ح ط (شكل ٨١) في المنحنيات ذات الاحداثيات المستقيمة هو الجزء المحصور بين موقع المرتب ونقطة التي تقطع فيها خط السينات العمودي على هذا المرتب وهذا التعريف يتأتى في المنحنيات القطبية التي ليس الراسم فيها ... نصف قطر الاحتراق ام فتحت المماس اذن حينئذ عمود اط المحصور بين نقطة ا ونقطة ط التي يقطع فيها المماس هذا العمود ويرى من ذلك ان تحت المماس يأخذ في المنحنيات القطبية موضعا يختلف عما يأخذه في المنحنيات غير القطبية وهذا واضح حيث ان تحت المماس في المنحنيات غير القطبية يعد دائما على محور الافاقي بخلاف ما اذا كانت المنحنيات قطبية فانه يتغير الموضع في كل نقطة من المنحنى لان محور الافاقي المذكور لا يوجد هنالك

• ١٨٣ • نبحث الآن عن الكمية الحسابية لتحت المماس في المنحنيات القطبية ولذلك نفرض ان ام و امَ يكونان نصفي قطرين احتراقيين (شكل ٨٢) ثم نرسم من نقطة م خط مح عمودا على نصف القطر الاحتراقي امَ ونرسم اط موازيا له عمودا فيحدث من تشابه مثلثي اطمَ و حمَم هذا التناسب

حمَ : حم :: امَ : اط

الذي يستخرج منه $\text{اط} = \frac{\text{امَ} \times \text{حم}}{\text{حمَ}}$

وبمراعاة كون حم هو أحد اضلاع مثلث حمَم القائم الزاوية يصير مقدار اط هذا

$$\text{اط} = \frac{\text{امَ} \times \text{حم}}{\sqrt{\text{ممَ}^2 - \text{حم}^2}}$$

وفي حالة التحديد والنهاية يكون امَ مساويا ام يعني ع وينطبق حم على قوس م ن ووتر ممَ على قوس ممَ ويصير اط تحت

المماس ولم يبق حينئذ الا البحث عن مقدارى مَ م و م ق فى حالة التحديد فنقول بمس لاتفاضل قوس المنحنى فيكون على موجب بند (١٨١)

$$\text{مَ م} = \sqrt{\text{حَ واس}^2 + \text{واع}^2}$$

والثانى وهو م ق يبحث عنه بالكيفية الآتية وهو أن يقال حيث انه يحدث من قمات ارر َ و ام ق هذا التناسب

ار : ررَ :: ام : م ق أو

ا : ررَ :: ع : م ق

يكون م ق = ع × ررَ وهذه الكمية تؤول فى حالة التحديد الى ع واس فنضع مقادير م ق و م مَ هذه فى مقدار اط بعد أن يغير امَ بكمية ع و حم بكمية م ق ونختصر فنجد

$$\text{اط} = \frac{\text{ع واس}}{\text{واع}}$$ وهى كمية تحت المماس

* ١٨٤ * والتعيين تحت العمودى نراعى انه حيث كان عمودى ع م (شكل ٨١) عموديا على المماس فرأسى ام يكون وسطا متناسبا بين تحت المماس وتحت العمودى ومن أجل ذلك يوجد

اط : ام :: ام : تحت العمودى أو

$$\frac{\text{ع واس}}{\text{واع}} : \text{ع} :: \text{ع} : \text{تحت العمودى}$$ ومنه يستخرج

$$\text{تحت العمودى} = \frac{\text{واع}}{\text{واس}}$$

وبالنظر الى الخط العمودى والخط المماس نراعى مثلثى م اع و م اط القائمى الزاوية فيحدث لنا منهما

$$\text{مع} = \sqrt{\text{ما}^2 + \text{اع}^2} \quad \text{و} \quad \text{مط} = \sqrt{\text{ما}^2 + \text{اط}^2}$$

ثم نضع فى هاتين المعادلتين مقادير ما و اع و اط فيوجد العمودى*

العمودى = $\sqrt{ع^٢ - \frac{ﻭَ^٢ ع^٤}{ﻭَ^٢}}$ و مماس = ع $\sqrt{١ + \frac{ع^٢ ﻭَ^٢}{ﻭَ^٢ ع^٤}}$

* ١٨٥ ولايجاد المقدار الحسابي للقطاع في المحنيات القطبية تنظر مثلث ام م (شكل ١٢) فيحدث منه

مساحة ام م = ...

وفى نهاية تكون مساحة مثلث ام م (شكل ١٢) عبارة عن مساحة قطاع عنصرى وعمود ... يتغير بقوس ... يساوى ع ﻭَ ... و ام يؤول الى ع فنضع هذه المقادير فى المعادلة السابقة فنجد

$$\text{مساحة القطاع العنصرى} = \frac{ع^٢ ﻭَ}{٢}$$

و يمكن حسابها للقطاع العنصرى بدلالة الاحداثيات المستقيمة لانه بوضع مقادير ع و ﻭَ المستخرجة من معادلات (١٠٢) و (١٠٥) فى هذه المعادلة تصير

$$\text{مساحة القطاع العنصرى} = \frac{س ﻭَص - ص ﻭَس}{٢}$$ وهو المراد بيانه

(فى تعين كمية نصف قطر الانحناء بخط قطبى)

* ١٨٦ * قد بينا فى بند (١٤٩) مقدار نصف قطر الانحناء بنسبة الاحداثيات المستقيمة ورأينا في اشكال الحروف هذا المقدار باشارة تجعل نق موجبا ولذلك وضعناه هكذا

$$نق = \frac{\left(١ + \frac{ﻭَص^٢}{ﻭَس^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ﻭَ^٢ص}{ﻭَس^٢}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (١٠٧)$$

فلمعرفة مقدار نق هذا بدلالة الاحداثيات القطبية لا يلزم الا حذف المكررات التفاضلية الداخلة فى هذا المقدار بواسطة المعادلات الآتية وهى

$$س = ع \text{ جتا } \theta \quad \text{و} \quad ص = ع \text{ جا } \theta$$

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلات ثم نقسم النواتج الحادثة على بعضها فيحدث لنا

$$\frac{\text{واص}}{\text{واس}} = \frac{\text{واع حاى} + \text{ع جتاى واى}}{\text{واع جتاى} - \text{ع حاى واى}}$$

ونرمز لكميتى هذا الكسر برمزى م و ن فنجد

$$\left.\begin{array}{l} \text{م} = \text{واع حاى} + \text{ع جتاى واى} \\ \text{ن} = \text{واع جتاى} - \text{ع حاى واى} \end{array}\right\} \cdots\cdots (١٠٨)$$

واذن يكون

$$\frac{\text{واص}}{\text{واس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \cdots\cdots\cdots\cdots (١٠٩) \quad \text{أو}$$

$$\frac{\text{واص}^٢}{\text{واس}^٢} = \frac{\text{م}^٢}{\text{ن}^٢}$$

و بواسطة هذه المعادلة يوجد بخصوص بسط مقدار نق

$$\left(١ + \frac{\text{واص}^٢}{\text{واس}^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} = \left(\frac{\text{ن}^٢ + \text{م}^٢}{\text{ن}^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}$$

ثم نرفع كل كمية من كميتى هذا الكسر الى قوة $\frac{٣}{٢}$ والقوة $\frac{٣}{٢}$ لكمية ن٢ هى ن٣ فنجد

$$\left(١ + \frac{\text{واص}^٢}{\text{واس}^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{\left(\text{ن}^٢ + \text{م}^٢\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{ن}^٣} \cdots\cdots\cdots\cdots (١١٠)$$

ونأخذ تفاضل معادلة (١٠٩) فيوجد

$$\frac{\text{وا}^٢\text{ص}}{\text{واس}} = \frac{\text{ن وام} - \text{م وان}}{\text{ن}^٢}$$

ثم نقسم الطرف الاول لهذه المعادلة على واس والطرف الثانى على المكافئة الى واس فنجد

وا٢

$$\frac{و' ص}{و ت} = \frac{ت و' م - م و' ت}{ت^{٢}} \quad \cdots\cdots (١١١)$$

وبواسطة مقادير المعلومة بمعادلتي ( ) و ( ) تؤول معادلة (١٠٧)

الى $$ق = \frac{(ت^{٢} + م^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{ت و' م - م و' ت} \quad \cdots\cdots\cdots (١١٢)$$

ولم يبق حينئذ الا تحويل هذه المعادلة الى ذات المتغيرين ى و ع ولذلك يعين اولا مقدار $ت^{٢} + م^{٢}$ باضافة مربعات معادلات (١٠١) على بعضها وباختصار الناتج بمساعدة معادلة حا^{٢} ى + جتا^{٢} ى = ١ فيوجد

$$ت^{٢} + م^{٢} = و' ع^{٢} + ع^{٢} و ى^{٢} \quad \cdots\cdots (١١٣)$$

وبالنظر الى مقام معادلة ( ) نأخذ تفاضل معادلات (١٠١) على التعاقب باعتبار و ى كمية ثابتة ثم نضرب الناتج الاول في ت والثاني في م فينتج

ت و' م = ت و' ع حا ى - ٢ ت و' ع جتا ى و ى - ت ع حا ى و ى^{٢}

م و' ت = م و' ع جتا ى - ٢ م و' ع حا ى و ى - م ع جتا ى و ى^{٢}

وحين تطرح المعادلة الثانية من الاولى يوجد

$$\left.\begin{array}{l} ت و' م - م و' ت = و' ع (ت حا ى - م جتا ى) \\ + ٢ و' ع و ى (ت جتا ى + م حا ى) \\ - ع و ى^{٢} (ت حا ى - م جتا ى) \end{array}\right\} (١١٤)$$

واذا ضربنا ثانية معادلتي (١٠١) في جا ى والاولى في جتا ى وطرحناهما من بعضهما واختصرنا الناتج بواسطة معادلة حا^{٢} ى + جتا^{٢} ى = ١ فيوجد

ت حا ى - م جتا ى = - ع و ى

وبعمل مشابه لهذا العمل يوجد

ت جتا ى + م حا ى = و' ع

واذا وضعت هذه المقادير في معادلة (١١٤) صارت تلك المعادلة

$$ت و' م - م و' ت = - ع و' ع و ى + ٢ و' ع^{٢} و ى + ع^{٢} و ى^{٣} \quad (١١٥)$$

وبواسطة مقادير التى تعينت بعن (١١٢) و (١١٥) تتغير معادلة (١١٢) بمعادلة

$$\text{نق} = \frac{(\text{وَ}\text{ع}^{2} + \text{عَ}^{2}\text{وَ}^{2})^{\frac{3}{2}}}{2\,\text{وَ}\text{عَ}\,\text{وَ} - \text{ع}\,\text{وَ}^{2}\,\text{عَ}\,\text{وَ} + \text{ع}^{2}\,\text{وَ}^{3}} \quad \text{وهى المطلوبة}$$

(فى المنحنيات العالية)

* ١٨٧ * تسمى بهذا الاسم المنحنيات التى تحتوى معادلاتها على كميات عالية اومكررات تفاضلية وعلى العموم بجميع المنحنيات التى لايمكن أن تبين معادلاتها بعدد محدود من الحدود الجبرية يقال انها منحنيات عالية ولنبين الشهير من هذه المنحنيات فنقول

(فى حلزونى ارشميدس أو كونون)

* ١٨٨ * اذا دار نصف قطر اب (شكل ٣٧) حول مركز ا وكانت نقطة ا تتحرك على هذا المستقيم تحركا مستقيما بحيث تأتى فى منتهاه وهو نقطة ب عند تمام دورته بعد ان كانت فى ابتداء التحرك فى مركز ا رسمت تلك النقطة فى هذا التحرك خطا منحنيا هو حلزونى ارشميدس ولكن اب = نق و قوس بد = ح و ام = ع فيوجد من بعد التعريف السابق

ام : اب :: قوس بد : محيط أو

ع : نق :: ح : ٢ط نق ومنه يستخرج

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}}{2\text{ط}}$$

وهذا المنحنى ليس له احداثيات مستقيمة على مايشاهد فاذا دار اب دورة تامة كان قوس بد المحيط و يكون حينئذ ح = ٢ط نق ومن ثمة تتؤول المعادلة السابقة الى

$$\text{ع} = \frac{2\text{ط}\,\text{نق}}{2\text{ط}} \quad \text{أو} \quad \text{ع} = \text{نق}$$

واذا استمرت نقطة ا فى تحركها على الانتساق رسم نصف قطر اب دورة

سورة ثانية حول مركز ا واذا أخذ ... = ... كانت النقطة المتحركة وقعت في ... في آخر هذه سورة ثانية وتكون حينئذ ... متوازية في ... وبنسب ... معلومة

ق = ... في ق = ... في وهكذا

(في الحلزوني اللوغاريتمي)

* ١٨٩ . الحلزوني اللوغاريتمي هو منحنى ثابت فيه زاوية امط (شكل ٨١) الحادثة بين نصف قطر ام الاحتراق وبين خط مط المماس المنحنى ثابتة ... نوجد بالرمز بحرف ح اعني زاوية امط

ظا امط = ح

وحيث انه يحدث من قيام مثلث ... في ... هذا التناسب

ا : ظا امط :: ام : اب ... ب

ظا امط = ...

واذا غير نصف القطر الاحتراقي ... م برمز ت و ... اط بكمية

$\frac{...}{و ع}$ الموجودة في بند (٨٣) لاجل تحت المماس لمنحنى قطبي نجد

ظا امط او ح = $\frac{ع و}{و ع}$ الذي يستخرج منه

ح و ع = و ... ... (١١٦)

وبأخذ تكامل هذه معادلة على ماسبق نجد

ح لوغا ع = ... + ثابتة

ولتكن هذه أساس الجذور اللوغاريتمية لمهندسين ... فذ ... كلوغاريتم الكمية هذا في ... تماماً ... لو هذا وتكون ... لوغا ع ... لوغاريتم ...

فى هذه الجملة اللوغارتمية (ولاثبات ذلك نقول حيث ان هـَ هى أساس الجملة اللوغارتمية المنسوبة للمهندس نيبير يوجد بالنسبة لهذا الاساس ح = لوهـع وبأخذ لوغاريتم الطرفين بحسب الجملة اللوغارتمية المبينة برمز لو يوجد

لو ع = لو (لوهـع) = لوغاع لوهـَ)

واذن يكون لو ع = ح + ثانية

* ١٩٠ * ويمكن رسم الحلزونى اللوغارتمى بالنقط بالكيفية الآتية وهى أن تقسم محيط ووَوً (شكل ٨٣) الى اقسام متساوية ثم توصل انصاف أقطار الى نقط التقسيم ويقطع عليها اجزاء ام وامَ وامً وامٌ .. الخ التى تكون مكونة متوالية هندسية فنقط م و مَ و مً و مٌ .... الخ تركب حلزونيا لوغارتميا واثبات ذلك أن يفرض ان اجزاء ممَ و مَمً و مًمٌ .. الخ تكون صغيرة الامتداد بحيث يمكن اعتبارها كخطوط مستقيمة فمثلثات امَمً و امًمٌ و ...... الخ تكون بهذا الاعتبار متشابهة لان الزوايا التى فى ا كلها متساوية بالعمل وزوايا ممَا و مَمًا و مًمٌا .... الخ كلها متساوية ايضا من الخاصية الاصلية للمنحنى ومن اجل ذلك توجد هذه التناسبات

ام : امَ :: امَ : امً

امَ : امً :: امً : امٌ

الخ و الخ و الخ و الخ

وذلك يدل على ان راسيات ام و امَ و امً .... الخ توجد فى الحلزونى على متوالية هندسية

* ١٩١ * الخط العمودى فى الحلزونى اللوغارتمى يساوى نصف قطر الانحناء أبدا وللبرهنة على ذلك نضع فى مقدار نصف قطر الانحناء فى المنحنيات القطبية

القطبية المتبين فى بند (١٨٦) بهذا الرمز

$$\text{نق} = \frac{(\text{وع}^{2} + \text{وس}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{و}^{2}\text{ع}\ \text{وس} - \text{وع}\ \text{و}^{2}\text{س}}$$

مقادير وع و و²ع المستخرجة من معادلة الخزونى اللوغارتمى عوضاعنها ولذلك نستخرج من معادلة (١١٦)

$$\text{وع} = \frac{\text{ع}\ \text{وس}}{\text{ح}} \quad \text{و} \quad \text{و}^{2}\text{ع} = \frac{\text{وع}}{\text{ح}}\ \text{وس} = \frac{\text{ع}\ \text{وس}^{2}}{\text{ح}^{2}}$$

ثم نضع هذه المقادير فى مقدار نق فيوجد

$$\text{نق} = \frac{(\frac{\text{ع}^{2}}{\text{ح}^{2}} + \text{ع}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ع}^{2}}{\text{ح}^{2}} + \text{ع}^{2}} = (\frac{\text{ع}^{2}}{\text{ح}^{2}} + \text{ع}^{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\text{ع}^{2}}{\text{ح}^{2}} + \text{ع}^{2}}$$

واذا وضعت فى كمية الخط العمودى التى هى على مافى بند (١٨٤)

$$\sqrt{\text{ع}^{2} + \frac{\text{وع}^{2}}{\text{وس}^{2}}}$$

مقدار $\frac{\text{وع}^{2}}{\text{وس}^{2}}$ حدث كذلك $\sqrt{\frac{\text{ع}^{2}}{\text{ح}^{2}} + \text{ع}^{2}}$ ويعلم من ذلك ان الخط العمودى يساوى فى هذا المنحنى نصف قطر الانحنائه وحيث ان نصف قطر الانحنا هذا يتجه على هـذا الخط العمودى على مافى بند (١٥٥) ينتج من ذلك ان هذه الخطوط تنطبق على بعضها

* ١٩٢ * وبواسطة هـذه الخاصية يثبت ان مفرود الخزونى اللوغارتمى هو حلزونى لوغارتمى ايضا ولاجل ذلك نعتبر نقطة ن (شكل ٨٤) من الخط العمودى التى هى من نقط نصف قطر الانحناء ايضا اذهى نهايته الحقيقية ونوجد لامحالة على المفرود ثم نرمز لابعادها القطبية برموز سَ و عَ فيسهل تعيين هذه الابعاد بدلالة ابعاد س و ع لنقطة م من المنحنى لانه اذا فرضنا ان وَ يكون قوسا من الدائرة

مرسومة بنصف قطر مساو للواحد كانت آفاق نقطتى م و ن تختلف عن بعضها بقدر القوس بسبب قيام زاوية م ا ن يكون ذلك القوس مساويا الى ربع المحيط ولعدم الخلاف فى المستعملات نبين برمز $\frac{\text{ط}}{٢}$ ربع المحيط المرسوم بنصف قطر يساوى الاحد فنجد $\text{ىَ} = \text{ى} + \frac{\text{ط}}{٢}$ وبأخذ تفاضل هذه المعادلة يوجد

$$\text{وى} = \text{وىَ}$$

وغير ذلك حيث ان بعد عَ القطبى لنقطة ن من المفروض يساوى تحت العمودى $\frac{\text{وع}}{\text{وى}}$ للحلزونى اللوغاريتمى تغير $\frac{\text{وع}}{\text{وى}}$ بكمية عَ فى معادلة هذا المنحنى فنجد $\text{ع} = \text{ح عَ}$ وعلى ذلك يكون $\text{وع} = \text{ح وعَ}$ فبوضع مقادير وى و وعَ و ع هذه فى معادلة (١١٦) للحلزونى اللوغاريتمى نجد

$$\text{ح} \frac{\text{وعَ}}{\text{ع}} = \text{وىَ}$$

وهذه المعادلة متحدة الشكل مع المعادلة السابقة فبها يفهم ان مفروض الحلزونى اللوغاريتمى هو حلزونى آخر لوغاريتمى وهذا ما أردنا بيانه

(فى الحلزونى الزائدى والحلزونيات الكامنة فى معادلة $\text{ع} = \frac{\text{ح}}{\text{ى}}$)

١٩٣ الخاصية التى يتميز بها الحلزونى الزائدى هى ثبوت أو عدم تغير تحت المماس فيه فاذا رمزنا لتحت المماس هذا برمز ح وساويناه بمقدار تحت المماس الذى قلناه وهو المبين فى بند (١٨٣) كانت معادلة هذا المنحنى يعنى الحلزونى الزائدى هكذا

$$\text{ع}^{٢} \frac{\text{وى}}{\text{وع}} = -\text{ح}$$

واخذت

وأخذت ثابتة ح باشارة ناقص لانه يوجد عندئذ

$$-\frac{ء ع}{ع^2} = \frac{ء س}{ح}$$

التي هي معادلة يحدث منها من بعد أخذ تكاملها على ما سبق

$$\frac{1}{ع} = \frac{س}{ح} + ث$$

وتؤول هذه المعادلة بتعيين كمية ث غير المتعينة بكمية أخرى $\frac{ث'}{ح}$ غير متعينة الى

$$\frac{1}{ع} = \frac{س}{ح} + \frac{ث'}{ح}$$

واذا أخذت النقطة الاصلية والابتدائية للافق س بحيث يكون الافق س + ث' مساويا للافق الجديد س كانت المعادلة السابقة هي

$$\frac{1}{ع} = \frac{س}{ح} \quad \text{وهو الاولى}$$

$$ع = \frac{ح}{س} \quad \cdots\cdots\cdot \quad (1)$$

وتبين هذه المعادلة انه يوجد $ع = \infty$ متى يكون $س = ٠$ وينتج من ذلك ان نصف قطر الاحتراق الموافق للنقطة التي يكون فيها $س = ٠$ هو خط متقارب منحنى

* ١٩٤ * معادلة (١١٧) تبين ان نصف قطر الاحتراق يتناسب للافق عكسا [illegible]

نجد بخصوص ع [illegible]

ويعلم من ذلك ان نصف قطر الاحتراق يؤول الى نصف ما كان في الدورة الاولى عند تمام دورتين ويؤول الى ثلث ما كان عند تمام ثلاث دورات وهلم جرا نظرا لعدة الدورات التي يدورها حول النقطة القطبية

* ١٩٥ * معادلة الحلزون اللوغارتمي ومعادلة حلزون ارشميدس ليست الا حالات خصوصية من معادلة $ع = ح س^ت$ لانه

بجعل $ك$ = ١ و $ح = \frac{1}{ط^2}$ تحدث المعادلة الثانية و بجعل
$ك$ = ـــ ١ تحدث الاولى ومن الحلزونيات التى تتبين بهذه المعادلة الحلزونى
المكافى وهو الموافق الى فرض $ك$ = ٢

(فى اللوغارتمى)

* ١٩٦ * اللوغارتمى منحن باحداثيات مستقيمة وفيه الافق لوغاريتم رأسيه واذن تكون معادلة هذا المنحنى بهذه الصورة

س = لوغا ص ومنها يستخرج

ص = $ح^{س}$ ثم يوجد بواسطة التفاضل

$$\frac{وص}{وس} = ح^{س} \text{ لوغا } ح$$

* ١٩٧ * للبحث عن بعض خواص هذا المنحنى نجعل س = ٠
فنجد ص = ١ واذا أعطينا بعد ذلك مقادير امتزائدة وموجبة
الى متغير س أخذ متغير ص فى الازدياد واذا أخذ متغير س
مقدارا سالبا ـــ ع يوجد ص = $ح^{-ع}$ = $\frac{1}{ح^{ع}}$ ويرى
ان الرأسى يتناقص كلما بعد عن النقطة الاصلية فى جهة الآفاق السالبة
وان المنحنى لايقابل محور الآفاق الاعلى بعد غير محدود فى الحالة التى تصير
فيها معادلة ص = $\frac{1}{ح^{ع}}$ آيلة الى

ص = $\frac{1}{ح^{\infty}}$ = ٠ وينتج من ذلك ان امتداد محور الآفاق
خط مقترب للمنحنى

* ١٩٨ * اذا أخذت من ابتداء النقطة الاصلية الآفاق المتساوية
(شكل ٣٨) اح = ع و اَحَ = ـــ ع يوجد
حم = $ح^{ع}$ و حَمَ = $\frac{1}{ح^{ع}}$ واذن يكون
حم × حَمَ = ١

١٩٩

* ١٩٩ * الخاصية الشهيرة لهذا المنحنى هى ثبوت اعنى عدم تغير تحت المماس فيه لانه يوجد بأخذ تفاضل معادلة اللوغاريتمى

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{س}}{\text{ح}}\ \text{لوغا ح}$$ ويستخرج من ذلك

$$\frac{\text{س}}{\text{ح}}\frac{\text{وس}}{\text{وص}} = \frac{1}{\text{لوغا ح}}$$ أو

$$\frac{\text{ص وس}}{\text{وص}} = \frac{1}{\text{لوغا ح}}$$

وحيث ان الطرف الاول لهذه المعادلة يبين تحت المماس للمنحنى كما فى بند (٦٩) فهو ثابت لمساواته كمية $\frac{1}{\text{لوغا ح}}$ الثابتة وهو المراد بيانه

(فى السكلويد)

* ٢٠٠ * السكلويد منحنى يرتسم بنقطة م (شكل ٣٩) الكائنة على محيط الدائرة المتدحرجة على مستقيم ر ح ومن المحقق ان جميع نقط قوس ر م تنطبق على التعاقب على مستقيم ر ا فتنطبق نقطة م فى نوبتها على ا فى هذا التحرك الآخذ من ر نحو ح ويكون قوس ر م مساويا لمستقيم ر ا

وحيث كانت جميع النقط التى تمر عليها م فى هذا التدحرج توجد على السكلويد فرضا فنقطة ا تكون كذلك على هذا المنحنى فنأخذها مبدأ للآفاق او نقطة أصلية وننزل عمود م هـ على قطر ر ر ونجعل ا ع = س و ع م = ص و ر ر = ٢ ح وقوس م ر = ز و م هـ = ع فنجد

ا ع = ا ر — ع ر أو

س = قوس م ر — م هـ أو

س = ز — ع .... (١١٨)

ونبحث اولا عن حذف قوس ز بالكيفية الآتية وهى أن نأخذ تفاضل

المعادلة السابقة فيوجد

$$\text{ء}\text{س} = \text{ء}\text{ر} - \text{ء}\text{ع} \quad \cdots\cdots \quad (١١٩)$$

ولايجاد مقدار ءر بدلالة ع نرى انه يوجد بين ع و ق هذا التعادل

$$\text{ع} = \text{جاز}$$

وباخذ تفاضل هذه المعادلة على مافى بند (٤٢) يوجد

$$\text{ء}\text{ع} = \text{ء}\text{ز}\ \text{جتاز}$$

ومنه يستخرج

$$\text{ء}\text{ر} = \frac{\text{ح}\ \text{ء}\text{ع}}{\text{جتاز}}$$

ويلزم تغيير مقدار جتاز فى هذه المعادلة بالمقدار الذى يحدث من معادلة

$$\text{جا}^{٢}\text{ز} + \text{جتا}^{٢}\text{ز} = \text{ح}^{٢}$$

أو وهو الاولى

$$\text{ع}^{٢} + \text{جتا}^{٢}\text{ز} = \text{ح}^{٢}$$

ويحدث بذلك

$$\text{ء}\text{ر} = \frac{\text{ح}\ \text{ء}\text{ع}}{\sqrt{\text{ح}^{٢} - \text{ع}^{٢}}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (١١٩) يكون

$$\text{ء}\text{س} = \frac{\text{ح}\ \text{ء}\text{ع}}{\sqrt{\text{ح}^{٢} - \text{ع}^{٢}}} - \text{ء}\text{ع} \quad \cdots\cdots \quad (١٢٠)$$

ولم يبق الابيان ع بدلالة صـ ولاجل ذلك نفرض ان و يكون مركز الدائرة الراسمة سم (شكل ٣٩) فيجد

$$\text{وهـ} = \sqrt{\text{م و}^{٢} - \text{م هـ}^{٢}}$$

أو

$$\text{ح} - \text{صـ} = \sqrt{\text{ح}^{٢} - \text{ع}^{٢}} \quad \cdots\cdots \quad (١٢١)$$

وبتربيع هذه المعادلة واختصارها يستخرج منها

$$\text{ع} = \sqrt{٢\text{ح}\text{صـ} - \text{صـ}^{٢}} \quad \cdots\cdots \quad (١٢٢)$$

وباخذ

و ... [illegible]

(١٢٣) [illegible]

[illegible] (١٢٣) [illegible]

[illegible]

وباختصار هذه [illegible]

[illegible]

٢٠١ • [illegible]
بالكيفية الآتية وهي ان تستخرج من معادلة [illegible]

ر = قوس (جـ = ت)

ثم تضع في هذه المعادلة عوضا عن ت مقدارها المستخرج من معادلة (١٢٣) فتجد

ر = قوس (جا = [illegible])

[illegible]

[illegible]

والجيب [illegible]

التطرف [illegible]

واذا أريد ادخال هذا الجيب يجب وضع

[illegible] قوس (جـ = [illegible])

٢٠٢ • ونبحث عن [illegible]
لا [illegible] ٢ [illegible]

تؤول كمية قوس (جا = $\sqrt{٢حص - ص^{٢}}$) الى
قوس (جا = $\sqrt{-٢حص - ص^{٢}}$) وهى كمية تخيلية وثانيا اذا جعل
ص = ٢ح + ل آلت كمية قوس (جا = $\sqrt{٢حص - ص^{٢}}$)
الى قوس (جا = $\sqrt{-٢حل - ل^{٢}}$) وهو مقدار تخيلى ايضا فاذن يكون
المنحنى محصورا بين متوازيى حءوا ب عد ا ب (شكل ٤٠) موازيا الى
حد على بعد هـ ف = ٢ح عن محور الآفاق

واكبر مقدار يكون لمتغير ص هو ٢ح لانه اذا دحرجت الدائرة الراسمة
من ا نحو ح (شكل ٤١) أخذت نقطة م التى كانت اولا فى ا
فى الارتفاع على الولا الى ان تصير فى ب التى هى طرف قطر ب د فيكون
عند ذلك افق اى مساويا الى دهـ ب يعنى نصف محيط الدائرة الراسمة
وهذا الناتج يطابق مايحدث من معادلة (١٢٤) حيث انه بجعل
ص = ٢ح فيها يوجد س = قوس (جا = ٠) والقوس الذى
جيبه صفر هو احد هذه القسى ٠ و دهـ ب و ٢دهـ ب و ٣دهـ ب و الخ
ويرى ان القوس فى هذه الحالة هو دهـ ب

ويعلم من ذلك انه حين تأتى نقطة م فى ب تكون قد رسمت قوس ا ب
من السكاويد فاذا استمرت هذه النقطة فى تحركها رسمت قوسا آخر ب ح
مشابها للاول وبالجملة متى استمرت الدائرة الراسمة فى تدحرجها على محور
الآفاق حدثت نقطة م قسيا من السكاويد لا حصر لعددها وهى
ح ب حَ و حَ بَ حً .... الخ انظر (شكل ٤٢) ويمكن أن تتحرك
الدائرة الراسمة فى جهة ا نحو اً وتحدث نقطة م حينئذ اقواسا
غير محصورة العدد ا بَ اَ و اَ بً اً .... الخ
وجملة الاقواس الموجودة فى الجهة المرادة هى المركبة للسكاويد

* ٢٠٣ * الخط العمودى فى النقطة التى ابعادها س و ص
(شكل ٤٣) متعين على ما فى بند (٧٠) بهذا القانون
العمودى

$$\text{العمودى} = \text{ص} \sqrt{\frac{\text{وا}\,\text{ص}^2}{\text{وا}\,\text{س}^2} + 1}$$

فاذا وضعنا فى هذا القانون مقدار $\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}$ المستخرج من معادلة السكلويد نجد

$$\text{العمودى} = \text{ص} \sqrt{\frac{2\,\text{ح ص} - \text{ص}^2}{\text{ص}^2} + 1} = \sqrt{2\,\text{ح ص}}$$

ولاجل رسم هذا المقدار نوصل وتر م ى (شكل ٤٣) فنجد

$$\text{ى هـ} : \text{م ى} :: \text{م ى} : \text{ى ب} \quad \text{أو}$$

$$\text{ص} : \text{م ى} :: \text{م ى} : 2\,\text{ح} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{وتر م ى} = \sqrt{2\,\text{ح ص}}$$

وحيث ان زاوية ب م ى قائمة من خاصية الدائرة فوتر م ب يكون عمودا على الخط العمودى م ى فى طرفه ويعلم من ذلك ان وتر م ب الممدود يمس السكلويد فى نقطة م لان الخط المماس والخط العمودى يشكلان بينهما زاوية قائمة ابدا

واذن يمكن امتداد الخط المماس للسكلويد فى نقطة م برسم نصف الدائرة الراسمة م ب ى ومد وتر ب م ولعدم تشكيل هذه الدائرة لازمة فى كل نقطة من المنحنى يكفى رسم نصف الدائرة برسمة على اكبر راسياتها وهو ب ى (شكل ٤٤) ومد خط م هـ من النقطة المفروضة م عموديا على ب ى ووصل وتر ب ح فخط م ط المرسوم من نقطة م موازيا لهذا الوتر يكون هو المماس المطلوب وذلك لكون لاقيه تمس سابق

* ٢٠٤ * لمعرفة مقدار نصف قطر الانحناء للسكلويد يلزم أن تستخرج مقادير $\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}$ و $\frac{\text{وا}^2\,\text{ص}}{\text{وا}\,\text{س}^2}$ من معادلة هذا المنحنى ثم توضع تلك المقادير فى كمية نصف قطر الانحنا التى هى

$$نق = -\frac{\left(1+\frac{وص^2}{وس^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{و^2ص}{وس^2}} \quad \text{على ما في بند (١٥٠)}$$

المأخوذة بإشارة سالبة لأنا نعلم أن هذا المنحنى يتقعر نحو محور الأفاق هنا ويحدث أولا من معادلة السكلويد

$$\frac{وص}{وس} = \frac{\sqrt{٢ح ص - ص^2}}{ص} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١٢٥)$$

ولإيجاد $\frac{و^2ص}{وس^2}$ نجعل $\frac{وص}{وس} = ع$ فنجد أيضا

$$ع = \frac{\sqrt{٢ح ص - ص^2}}{ص} = \sqrt{\frac{٢ح}{ص} - ١}$$

وبأخذ التفاضل على ما في بند (٢٣) يوجد

$$وع = -\frac{\frac{ح}{ص^2}وص}{\sqrt{\frac{٢ح}{ص}-١}} = -\frac{ح وص}{ص\sqrt{٢ح ص - ص^2}}$$

وإذن يكون

$$\frac{وع}{وص} = -\frac{ح}{ص\sqrt{٢ح ص - ص^2}}$$

ثم نضرب هذه المعادلة في معادلة (١٢٥) فنجد على ما في بند (٤٤)

$$\frac{وع}{وس} = -\frac{ح}{ص^2} \quad \text{أو} \quad \frac{و^2ص}{وس^2} = -\frac{ح}{ص^2}$$

وبواسطة هذه المقادير تؤول كمية نصف قطر الانحناء إلى

$$نق = \frac{\left(\frac{٢ح}{ص}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ح}{ص^2}} = \frac{(٢ح)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ح ص^{\frac{3}{2}}}{ص^2}} = \frac{٢^{\frac{3}{2}} ح^{\frac{1}{2}}}{\frac{١}{ص^{\frac{1}{2}}}}$$

وبجعل

وتجعل ص ث [illegible]

[illegible]

ويلزم من ذلك [illegible] (شكل ٤٥) [illegible]

ضعف الخط العمودي [illegible]

٢٠٥ • وتشرح معادلة المنحني بوضع مقادير

$\frac{ء ص}{ء س}$ و $\frac{ء^{2} ص}{ء س^{2}}$ في قانون بند (١٤٩) [illegible]

$$ص - و = - \frac{\frac{ء ص}{ء س}}{\frac{ء^{2} ص}{ء س^{2}}} \left(1 + \frac{ء ص^{2}}{ء س^{2}} \right)$$

$$س - ر = - \frac{\frac{ء ص}{ء س}}{\frac{ء^{2} ص}{ء س^{2}}} \left([illegible] \right) = - (ص - و) \frac{ء ص}{ء س}$$

فينتج

[illegible]

[illegible]

وإن يكون

[illegible]

أو (شكل ٤٦)

[illegible]

وبمربعة كون أح + م هـ = ار = قوس م س يمكن وضع
المعادلة الاخيرة هكذا

ر = قوس م س + م هـ ..... (١٢٦)

واذا مددنا س ر وأخذنا ر ل = س ر = ٢ ح ورسمنا نصف
محيط ر م َ ل على ر ل مر هذا النصف محيط بنقطة م َ بسبب تساوى
وترى م َ س و م س ويوجد اذ ذاك

قوس م س = قوس م َ س و م هـ = م َ هـ َ
فنضع هذه المقادير فى معادلة (١٢٦) فيوجد

ر = قوس م َ س + م َ هـ َ واذن يكون

ر = قوس م َ س + $\sqrt{\text{٢ح و} - \text{و}^٢}$ ...... (١٢٧)
وهذه هى المعادلة التى توجد بين ابعاد اك = ر و كم َ = و
لنقطة ما م َ من المفروض فنطول الا ن الرأسى ح ى = ٢ ح (شكل ٤٦)
بكمية ى ا َ مساوية ايضا الى ٢ ح ونرسم من نقطة ا َ خط ا َ ى َ
موازيا لخط اى ونحول النقطة الاصلية ا فى ا َ وليكن لاجل ذلك
ا َ ك َ = ر َ و ك َ م َ = و َ فنجد لاجل الافق ا َ ك َ = اى ـ اك أو

ر َ = ½ المحيط الراسم ـ اك أو
ر َ = ط ح ـ ر
وبالنظر الى الرأسى و َ يوجد

م َ ك َ = ا َ ى ـ كم َ أو
و َ = ٢ ح ـ و
ويستخرج من هذه المعادلات

ر = ط ح ـ ر َ و و = ٢ ح ـ و َ
وبواسطة هذه المقادير تؤول معادلة (١٢٧) الى

$$\text{طح} - \text{رَ} = \text{قوس مَر} + \sqrt{\text{٢حوَ} - \text{وَ}^{2}} \quad \text{أو}$$

$$\text{طح} - \text{رَ} = \text{قوس رمَل} - \text{قوس مَل} + \sqrt{\text{٢حوَ} - \text{وَ}^{2}}$$

$$= \text{طح} - \text{قوس مَل} + \sqrt{\text{٢حوَ} - \text{وَ}^{2}}$$

وعلى ذلك يكون

$$\text{رَ} = \text{قوس مَل} - \sqrt{\text{٢حوَ} - \text{وَ}^{2}}$$

وهذه المعادلة هى معادلة سكلويد فيعلم من ذلك ان مفرود السكلويد سكلويد [illegible]

* ٢٠٦ * ويمكن الاثبات بالوجه الآتى على ان المفرود اا َ (شكل ٤٦) سكلويد ولذلك نقول عندنا

$$\text{قوس لمَ} + \text{قوس رمَ} = \text{طح} \quad \text{فيكون}$$

$$\text{قوس لمَ} = \text{طح} - \text{قوس رمَ}$$

وغير ذلك

$$\text{قوس رمَ} = \text{قوس مر} = \text{ار كماف بند (٩٩)}$$

فاذا وضعنا هذا المقدار فى المعادلة السابقة حدث

$$\text{قوس لمَ} = \text{طح} - \text{ار} = \text{اد} - \text{ار} \quad \text{أو}$$

$$\text{قوس لمَ} = \text{لاَ}$$

وهذه هى خاصية السكلويد

(فى تغيير المتغير غير المطلق)

* ٢٠٧ * متى يفرض قانون مشتملا على مكررات [illegible] فلا يمكن حذف تلك المكررات الا بمساعدة معادلة [illegible] هذا القانون عليه ومثاله ان يطلب ما يؤول اليه [illegible]

$$\frac{\left(1 + \frac{\text{وص}^{2}}{\text{وس}^{2}}\right)\frac{\text{وص}}{\text{وس}}}{\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}}$$

... يلزم أن يستخرج من معادلة القطع المكافئ

... $ص = ح س^2$ مقادير $\frac{و ص}{و س}$ و $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ ثم توضع هذه المقادير

في ... لتحذف المكررات التفاضلية حينئذ و اذا نظرت كميات

$\frac{و ص}{و س}$ و $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ مجهولة يلزم غالبا معادلتان لحذفها من اى

قانون كان وتدرك هاتان المعادلتان باخذ تفاضل معادلة المنحنى مرتين

على التوالى

* ٢٠٨ * متى تزال $و س$ بواسطة العمليات الجبرية من أن تكون

موجودة تحت $و ص$ كان القانون الآتى

$$\frac{ص (و س^2 + و ص^2)}{و س^2 + و ص^2 - ص و^2 ص} \cdots\cdots\cdots (٣١)$$

فلوضع ينعدل بتغير كميات $و س$ و $و ص$ و $و^2 ص$ كمجهولة

وحيث انه يلزم لحذفها على العموم معادلات عدتها كعدتها فلا يتراءى اولا ان

الحذف ممكن حيث كان تفاضل معادلة المنحنى لا يحدث الا معادلتين بين

$و س$ و $و ص$ و $و^2 ص$ لكن يلزم التأمل انه حين تحذف $و ص$ و $و^2 ص$

بواسطة هاتين المعادلتين يوجد فى القانون مضروب مشترك $و س^2$ يحذف

و يسقط فاذا كان المنحنى قطعا مكافئا معادلته $ص = ح س^2$ مثلا فانه

باخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين بالتوالى يوجد

$$و ص = ٢ ح س و س \quad و \quad و^2 ص = ٢ ح و س^2$$

و بوضع هذه المقادير فى قانون (١٢٨) يوجد بعد اسقاط المضروب

المشترك $و س^2$

$$\frac{ص (١ + ٤ ح^2 س^2)}{١ + ٤ ح^2 س^2 - ٢ ح ص}$$

* ٢٠٩ * [illegible] حاصل ضرب [illegible] و [illegible] مضروب

[illegible] في [illegible] تكون [illegible]

[illegible] جميع [illegible]

على [illegible] مضروباً [illegible]

[illegible] حدود التي كانت متنوعة بكمية [illegible] بخلاف

الحدود التي كانت متنوعة بكمية [illegible] برتبة

[illegible] لأن حاصل ضرب [illegible] في [illegible] يؤول الى [illegible]

ومتى يؤخذ تفاضل معادلة [illegible] بعد [illegible] الصورة

[illegible]

في [illegible]

[illegible] بحصول ضرب [illegible]

* ٢١٠ * [illegible]

برتبة [illegible] يمكن [illegible] تطبيقه على [illegible] التفاضلات

[illegible] علامن ذلك ويبنى عليه [illegible]

[illegible] ملازم [illegible] تفاضلات [illegible]

* ٢١١ * ولا [illegible]

[illegible]

لانه اذا فرضنا مثلا انه يكون داخلا فى هذا القانون التفاضلات
وَس . وَص و وَ²س و وَ²ص واخذنا تفاضل المعادلة
المتبينة برمز ص = دس مرتين على التوالى حدث منهما ان المعادلتان

$$ و(و^{٢}ص و س - و^{٢}س و ص) = ٠ \quad و \quad و(و س و ص و^{٢} س و^{٢} ص و^{٢}س) $$

ولا يمكن بهاتين المعادلتين الا حذف اثنين من التفاضلات وَص و وَ²س
و وَ²ص الثلاث ويشاهد عدم امكان حذف جميع التفاضلات الداخلة
فى القانون المفروض ويوجد اذن فى هذه الحالة شرط مقدر متبين
بالتفاضل وَ²س وهذا الشرط هو أن متغير س معتبر بنفسه كدالة
لمتغير ثالث لا يظهر فى القانون ويسمى بالمتغير غير المعلق ويصير ذلك فى غاية
الوضوح اذا لوحظ كون معادلة ص = دس يمكن اشتقاقها
من جملة معادلتى

$$ س = كـ ت \quad و \quad ص = ت $$

اللازم حذف ت من بينهما ولذا تؤول معادلة $ص = ح \frac{(س - هـ)^{٢}}{ت^{٢}}$
الى جملة معادلتى

$$ س = ت + هـ \quad و \quad ص = ح ت^{٢} $$

ويدرك ان س و ص يجب أن يتغيرا على مقتضى الزيادة التى يمكن
ان تأخذها كمية ت ولكن هذه الفرضية يعنى كون س و ص
يتغيران من بعد الزيادة المفروضة لمتغير ت تقتضى وقوع معادلات بين
س و ت وبين ص و ت واحدى هذه المعادلات تكون بالاختيار
لانه اذا فرض ان المعادلة التى نرمز لها على العموم برمز ص = دس
تكون $ص = ح \frac{(س - هـ)^{٢}}{ت^{٢}}$ مثلا ونظمت بين ت و س
معادلة $س = \frac{ت^{٣}}{هـ^{٢}}$ الحيث ما اتفقت ووضع هذا
المقدار فى معادلة $ص = هـ \frac{(س - هـ)^{٢}}{ت^{٢}}$ غيرها الى معادلة

صحيح

$\text{ص} = \text{ح} \frac{(\text{س}^2 - \text{ح}^2)^2}{\text{س ح}^4}$ التى اذا وفقت مع $\text{ص} = \frac{\text{ح}^2}{\text{س}^2}$

حدثت جوسية خذف $\text{ص} = \text{ح} \frac{(\text{س} - \text{ح})}{\text{س}^2}$ وهو الشرط الواجب

مراعاته فى تحضير متغير ے

* ٢١٢ * واذن يمكن تعيين متغير ے غير معلق لاختيارنا فيؤخذ له وتر او قوس او افق او رأسى مثلا فاذا بين ے قوسا من المنحنى يجب أن يوجد $\text{وے} = \sqrt{\text{وس}^2 + \text{وص}^2}$ واذا كانت ے تبين وترا وكانت النقطة الاصلية رأس المنحنى يكون $\text{ے} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ واخيرا يمكن ان تكون ے الافق او الرأسى ويوجد عند ذلك $\text{ے} = \text{س}$ او $\text{ے} = \text{ص}$

* ٢١٣ * قد يكون انتخاب أحد هذه الفروضات او غيرها ضروريا لاجل أن يكون القانون المشتمل على التفاضلات عاريا عنها اى عن هذه التفاضلات والغالب انه اذا لم يفعل هذا الانتخاب يفرض تقديرا ان المتغير غير المعلق كان متعينا ومثاله ان الفرضية فى الحالة المعتادة التى لا يحتوى القانون فيها الا على تفاضلات وس و وص و $\text{و}^2\text{ص}$ و $\text{و}^3\text{ص}$ و الخ هى ان متغير ے غير المعلق كان مأخوذا لاجل الافق لانه ينتج من ذلك حينئذ

$$\text{ے} = \text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وس}}{\text{وے}} = ١ \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{س}}{\text{وے}^2} = ٠ = \frac{\text{و}^3\text{س}}{\text{وے}^3} = ٠ \ \text{الخ}$$

ويرى ان القانون لا يشتمل على التفاضلات الثانية والثالثة و الخ للكمية س

* ٢١٤ * ولتدبير القانون فى عمومه يلزم من بعد ما سبق ان تكون س و ص دوال لمتغير ثالث غير معلق ے ويوجد على موجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{وص}}{\text{وے}} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} \cdot \frac{\text{وس}}{\text{وے}}$$

ويستخرج من هذه المعادلة

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \frac{\dfrac{\text{و ص}}{\text{و ے}}}{\dfrac{\text{و س}}{\text{و ے}}} \quad \cdots\cdots \quad (١٢٩)$$

ثم ناخذ التفاضل الثانى الى ص ونفعل بالطرف الثانى كما فعل بالكسور فى بند (١٩) فيوجد

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}} = \frac{\dfrac{\text{و س}}{\text{و ے}}\,\dfrac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و ے}^{2}} - \dfrac{\text{و ص}}{\text{و ے}}\,\dfrac{\text{و}^{2}\text{س}}{\text{و ے}^{2}}}{\dfrac{\text{و س}^{2}}{\text{و ے}^{2}}}$$

ولرمز و ے فى هذه الكمية استعمالان احدهما بيان ما يكون المتغير غير المعلق ے والآخر دخوله فى الكمية المذكورة كعلامة جبر (والمراد بعلامة الجبر هنا كمية جبرية) ويكفى أن لا نعتبر و ے الا بالمعنى الثانى مادامت ے هى المتغير غير المعلق هذا والكمية السابقة تختصر باسقاط المضروب المشترك و ے^{3} بكتابتها هكذا

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}} = \frac{\text{و س}\,\text{و}^{2}\text{ص} - \text{و ص}\,\text{و}^{2}\text{س}}{\text{و س}^{2}}$$

واذا قسمنا على و س صارت

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}} = \frac{\text{و س}\,\text{و}^{2}\text{ص} - \text{و ص}\,\text{و}^{2}\text{س}}{\text{و س}^{3}}$$

* ٢١٥ * وبالعمل هكذا على معادلة (١٢٩) يرى انه باخذ ے متغيرا غير معلق يصير الطرف الثانى للمعادلة مطابقا للاول (ومعنى مطابق للاول عينه حقا بحت) ويعلم من ذلك انه متى تؤخذ ے للمتغير غير المعلق

لا يكون

[illegible]

[illegible]

$$ق = [illegible]$$

[illegible] رتق في [illegible] [illegible]

[illegible]

$$ق = [illegible]$$

[illegible]

$$ق = [illegible] \qquad \ldots\ldots (٣٠)$$

٢١٦ [illegible]

[illegible]

ان وجد [illegible]

[illegible]

في الحالة الاعتيادية الى

$$نق = \frac{(وس^2 + وص^2)^{\frac{3}{2}}}{وس\, و^2ص} = \frac{\left(1 + \frac{وص^2}{وس^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{و^2ص}{وس^2}}$$

* ٢١٧ * ولكن اذا كان يراد أن يكون الرأسي ص يبين المتغير غير المعلق عوضا عن أخذ س لذلك المتغير تنظر أن هذا الشرط يكون متبينا بمعادلة ص = ى وباخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

$$\frac{وص}{وى} = ١ \quad ، \quad \frac{و^2ص}{وى^2} = ٠$$

وتبين المعادلة الاولى من هاتين المعادلتين ان ص هو المتغير غير المعلق وهذا لا يغير القانون ولكن الثانية تبين ان $و^2ص$ يجب أن يكون صفرا وتؤول معادلة (١٣٠) حينئذ الى

$$نق = -\frac{(وس^2 + وص^2)^{\frac{3}{2}}}{وص\, و^2س}$$

* ٢١٨ * وليتنبه انه متى تكون س مبينة للمتغير غير المعلق ووجد بناء على ذلك $و^2س = ٠$ استدل بهذه المعادلة على ان وس ثابتة وينتج من ذلك عموما أن تفاضل المتغير المنظور متغيرا غير معلق كمية ثابتة

* ٢١٩ * واخيرا اذا أخذ القوس للدلالة على المتغير غير المعلق يوجد

$$وى = \sqrt{وس^2 + وص^2}$$

وبتربيع الطرفين وقسمتهما بعد ذلك على $وى^2$ يوجد

$$\frac{وس^2}{وى^2} + \frac{وص^2}{وى^2} = ١$$

واذا

وإذا أخذنا تفاضل هذه المعادلة واعتبرنا $\text{و}\,\text{ى}$ ثابتة على ما في بند (٨٢)
حيث كانت ى هي المتغير غير المعلق وأجرينا العمل كما في قاعدة الأسس وجدنا

$$\frac{2\,\text{وس}\,\text{و}^2\text{س}}{\text{وى}^2}+\frac{2\,\text{وص}\,\text{و}^2\text{ص}}{\text{وى}^2}=0$$

ومنه يستخرج

$$\text{وس}\,\text{و}^2\text{س}=-\,\text{وص}\,\text{و}^2\text{ص}$$

وإذا وضعنا حينئذ مقدار $\text{و}^2\text{س}$ أو مقدار $\text{و}^2\text{ص}$ المستخرج من هذه المعادلة في معادلة (١٣٠) يوجد في الحالة الأولى

$$\text{نق}=\frac{(\text{وس}^2+\text{وص}^2)^{\frac{3}{2}}}{(\text{وس}^2+\text{وص}^2)\,\text{و}^2\text{ص}}\,\text{وس}=\frac{\sqrt{\text{وس}^2+\text{وص}^2}}{\text{و}^2\text{ص}}\,\text{وس}$$

وفي الحالة الثانية

$$\text{نق}=-\frac{(\text{وس}^2+\text{وص}^2)^{\frac{3}{2}}}{(\text{وس}^2+\text{وص}^2)\,\text{و}^2\text{س}}\,\text{وص}=-\frac{\sqrt{\text{وس}^2+\text{وص}^2}}{\text{و}^2\text{س}}\,\text{وص}$$

٢٢٠ * لم نعتبر فيما سبق إلا المكررين التفاضليين $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ و $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ ولكن إذا كان القانون يحتوي على مكررات تفاضلية برتب عليا تعين مقادير $\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3}$ و $\frac{\text{و}^4\text{ص}}{\text{وس}^4}$ .... الخ التي تنسب للحالة التي يكون فيها س و ص دوال لمتغير ثالث غير معلق بكيفيات مشابهة للتي استعملت

(في طريقة الصغيرات جدا)

* [illegible] ادرك بذاته واعتباره يؤول الى تقرير هذه القضية [illegible] كمية ثابت [illegible] لا تكون غير متنهية اوغير محدودة واذا يجب [illegible] ح من كمية سـ + ح اذا اعتبرت سـ غير متنهية والا [illegible] سـ الزيادة [illegible] هذا يخالف تقريرنا

* ٢٢٢ * [illegible] هذه القضية هى الاساس لم أن أبينها [illegible] فنقول

لنكن معادلة

$$\frac{١}{ح} + \frac{١}{سـ} = م \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١٣١)$$

فبضرب هذه المعادلة فى ح سـ يحدث

$$سـ + ح = م ح سـ \quad \cdots\cdots \quad (١٣٢)$$

هذا واذا فرضنا ان سـ تصير غير متنهية وصل كسر $\frac{١}{سـ}$ الى غاية درجة نقصانه فيؤول لا محالة الى صفر وتصير معادلة (١٣١) حينئذ هكذا

$$م = \frac{١}{ح}$$

ولو وضعنا هذا المقدار فى معادلة (١٣٢) حدث

$$سـ + ح = سـ$$

وذلك نورى ان كمية سـ + ح تؤول الى سـ متى تكون سـ غير متنهية وهذا ما أردنا اثباته

* ٢٢٣ * كمية ح التى تكون سـ بالنسبة اليها غير متنهية هى المسماة صغيرة جدا بالنسبة الى سـ

* ٢٢٤ * حيث انا لا نعتبر هنا الا نسب الكميات فالاثبات السابق يتبع ايضا متى تكون الكمية سـ مقدار متنه بشرط ان مقدار ح يكون صغيرا جدا بالنسبة الى كمية سـ وقضايا الكسور تجعل هذه الدعوة فى غاية الوضوح لانه اذا قارنا كمية سـ المتنهية بكسر $\frac{ع}{ح}$ يتحقق انه كلما

زادت

زدت ع نقص الكسر واذن يصير هذا الكسر على الاطلاق صفرا متى تصير ع غير متناهية ولذا يستقط النظر الى ـ التى تكون غير متناهية بالنظر الى ع

• ٢٢٥ • الكميتان الصغيرتان جدا لاتكون نسبتهما صفرا لانه يوجد

ع/∞ : ∞ :: ح : ـ

وزيادة على ذلك يعرف ان الكميتين الصغيرتين جدا يمكن اعتبارهما كالكميتين الكبيرتين جدا ولذا لاتكون النسبة ىس/وس للكميتين الصغيرتين جدا المرموز لهما برموز ىس و ىص صفرا وهذا ناتج بطريق ملوح به باعتبار النهايات

• ٢٢٦ • متى ذكرت كمية س صغيرة جدا بالنسبة لمقدار متناه رمزه ح فالمربع س² يكون صغيرا جدا بالنسبة الى س لانه يستدل بتناسب

١ : س :: س : س²

ان س² تدخل فى س مرارا عدتها كعدة دخول س فى الواحد يعنى بعدد مرار غير متناه

ويثبت كذلك بواسطة تناسب س : س² :: س² : س³ انه متى كان س² صغيرا جدا بالنسبة الى س كان بالضرورة س³ صغيرا جدا بالنسبة الى س² ولذلك انقسمت الصغيرات جدا الى درجات وهى اى الكمية س فى الامثلة السابقة هى صغيرة جدا بدرجة اولى و س² صغيرة جدا بدرجة ثانية و س³ صغيرة جدا بدرجة ثالثة وهكذا

• ٢٢٧ • ويستدل انه متى كانت س صغيرة جدا بالنسبة الى ح كانت كذلك س مضروبة فى كمية محدودة ـ وثبات ذلك انه تكون حيث ان كمية س يمكن اعتبارها

كسر امقامه يكون غير محدود فترمز لها بهذا الرمز $\frac{هـ}{\infty}$ ومعلوم ان $\frac{هـ}{\infty}$ او $\frac{ح}{\infty}$ شيأ واحدا وهذه الكميات ليست الاعدما بالنسبة الى ح

* ٢٢٨ * الصغير جدا بدرجة ولى يسقط متى يكون جانب كمية محدودة لانها لا تزداد به وكذا يسقط الصغير جدا بدرجة ثانية الذى يكون فى جانب صغير جدا بدرجة أولى وهلم جرا

مثلا اذا كانت هذه الكمية

$$ح + ـص + هـص^{٢} + وص^{٣}$$

وكان فيها ص صغيرا جدا بدرجة اولى كان هـص² صغيرا جدا بدرجة ثانية و ص³ صغيرا جدا بدرجة ثالثة ويجب حينئذ اسقاط وص³ لان وص³ لا يمكن أن تزود هـص² وحيث ان هـص² لا تزيد ـص فيحذف ايضا وبالجملة يحذف ـص كذلك حيث ان هذا الصغير جدا الذى هو بدرجة أولى لا يمكن أن تزداد به كمية ح المحدودة واذن يبقى ح فقط

* ٢٢٩ * الكميتان الصغيرتان جدا س و صَ حاصل ضربهما يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية لانه يحدث من حاصل ضرب س × ص هذا التناسب

$$١ : ص :: س : س صَ$$

وبه يستدل انه حيث كان ص صغيرا جدا بالنسبة الى ١ فحاصل الضرب س ص يكون صغيرا جدا بالنسبة الى س واذن يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية

* ٢٣٠ * ويثبت ايضا ان حاصل ضرب الثلاث صغيرات جدا بدرجة أولى يبين صغيرا جدا بدرجة ثالثة

* ٢٣١ * يمكنا الآن شرح نظر التفاضل من بعد طريقة الصغيرات جدا ولاجل ذلك نفرض ان متغير س ياخذ فى دالة ما زيادة صغيرة جدا تتبين برمز وس بحيث تتغير س بكمية س + وس والفرق بين

الناتج

الناتج المستجد والاول يكون هو تفاضل هذه الدالة

* ٢٣٢ * فلايجاد تفاضل دس مثلا نغير في هذه الدالة س بكمية $\text{س} + \text{وس}$ فتصير $\text{د}(\text{س} + \text{وس}) = \text{دس} + \text{د}\,\text{وس}$ واذا طرح منها دس كان الباقي وهو $\text{د}\,\text{وس}$ هو التفاضل المطلوب

* ٢٣٣ نبحث ايضا عن تفاضل $\text{دس}^{٣}$ ولذلك نغير س بكمية $\text{س} + \text{وس}$ فيوجد $\text{د}(\text{س} + \text{وس})^{٣}$ ثم نطرح من هذا الناتج كمية $\text{دس}^{٣}$ ونحل ونختصر فنجد اولا

$$٣\,\text{دس}^{٢}\,\text{وس} + ٣\,\text{دس}\,\text{وس}^{٢} + \text{د}\,\text{وس}^{٣}$$

وفي هذا يجب اسقاط كمية $\text{د}\,\text{وس}^{٣}$ حيث انها صغيرة جدا بدرجة ثالثة ولايمكن أن تزادها $٣\,\text{دس}\,\text{وس}^{٢}$ وحيث ان $٣\,\text{دس}\,\text{وس}^{٢}$ صغيرة جدا بدرجة ثانية فينبغي اسقاطها ايضا من جنب $٣\,\text{دس}^{٢}\,\text{وس}$ التي هي صغيرة جدا بدرجة أولى ويبقى $٣\,\text{دس}^{٢}\,\text{وس}$ لاجل التفاضل المطلوب

* ٢٣٤ يؤخذ تفاضل اي دالة متغير س من بعد القاعدة المبنية بأن تسقط الصغيرات جدا بدرجة عليا ويؤول هذا الى حفظ الحد الاول من الحل كما فعل في طريقة النهايات

ومثاله لايجاد تفاضل كس ينظر أنه عوضا عن عمل بطريق النهايات هذا

$$\frac{\text{ك}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{كس}}{\text{هـ}} = \text{ع} + \text{ح}\,\text{هـ} + \text{ح}'\,\text{هـ}^{٢} + \text{ح}''\,\text{هـ}^{٣} \ldots \text{الخ}$$

الذي يحدث منه في حالة التحديد والنهاية $\frac{\text{و}\,\text{كس}}{\text{وس}}\,\text{وس} = \text{ع}\,\text{وس}$

لاجل التفاضل يفعل بطريق الصغيرات جدا هكذا

$$\text{ك}(\text{س} + \text{وس}) = \text{كس} + \text{ع}\,\text{وس} + \text{ح}\,\text{وس}^{٢} + \text{ح}'\,\text{وس}^{٣} + \ldots \text{خ}$$

وبطرح الدالة الاولية يبقى

$$\text{ع}\,\text{وس} + \text{ح}\,\text{وس}^{٢} + \text{ح}'\,\text{وس}^{٣} + \ldots\ldots \text{خ}$$

وحيث انه يجب اسقاط الصغيرات جدا بدرجات عالية فلا يحفظ الا الحد
ح وس الذى يكون هو التفاضل المطلوب

* ٢٣٥ ولايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين ص و ع
يفرض ان ص تصير ص + وص و ع تصير ع + وع
متى تغير س بكمية س + وس فحاصل الضرب ص ع يصير
حينئذ محولا الى (ص + وص)(ع + وع) وبحله وطرح ص ع
منه يبقى ص وع + ع وص + وص وع وحيث ان الحد الاخير
لهذا الناتج صغير جدا بدرجة ثانية فيسقط ويوجد لتفاضل ص ع
كمية ص وع + ع وص

* ٢٣٦ * ويستخرج من بعد ذلك تفاضل حاصل ضرب جملة مضاريب وبعده تفاضل $س^م$ بالكيفيات التى اتبعناها حين استعملنا طريقة النهايات

* ٢٣٧ * تفاضل كية $د^{س}$ يستخرج ايضا بسهولة متى تحل كية $د^{س+وس}$ وهذا الحل ينال لكل كية $د^{س+هـ}$ من بعد بند (٣٦)

ثم يبحث عن مقدار $د^{س+وس} - د^{س}$ ولايحفظ منه الا حده
الاول وتسقط الحدود الباقية حيث انها صغيرات جدا بدرجات واطية عن
درجة الحد المحفوظ ويستخرج من بعد هذا تفاضل لوغا س كما يبين

* ٢٣٨ * وبالنظر لتفاضل جاس يوجد

جا(س+وس) − جاس = جاس جتا وس + جا وس جتاس − جاس

وبسبب كون قوس وس صغيرا جدا يكون

جتا وس = ١ و جا وس = وس

ويوجد بواسطة هذه المقادير

و. جاس = وس جتاس

* ٢٣٩ * لما كانت ترجع مسئلة المماسات ومربعاتها نذكر في حساب التفاضل التزمت ان نبينها بطريقة لصعوبة جدا فنقول ليكن ح م و حَ مَ (شكل ٤٧) رأسيات متقربان جدا و م و خطا موازى ووراه اى فى ... يكون ... كمثلث ... من المنحنى لانه حيث كان هذا العنصر صغير جدا فان امره مستقيم فاذا رمزنا لبعد اح بحرف س وابعد م ح بحرف ص صارت زيادة س التى هى ح حَ عبارة عن وَس وزيادة ص تكون مَو = وَص ومثلث م مَو الصغير جدا يحدث منه مشابهته مثلث م ح ط

$$مَو : م و :: م ح : ح ط \qquad او$$

$$وَص : وَس :: ص : ح ط \qquad ومنه يكون$$

$$ح ط = ص \frac{وَس}{وَص}$$

ثم يوجد العمودى والمماس ومعادلات هذه الخطوط كما فى بندى (٧٠) و (٧١)

* ٢٤٠ * ولمعرفة تفاضل قوس يعتبر القوس المحصور بين الرأسيين ح م و حَ مَ القريبين من بعضهما جدا كأنه مستقيم فمن ثمة يحدث من مثلث م مَ و القائم الزاوية

$$م مَ^{٢} = م و^{٢} + مَ و^{٢}$$

وبالرمز بحرف ق للقوس لكى يكون م مَ هو ... و ق و نؤول المعادلة السابقة الى

$$وَق^{٢} = وَس^{٢} + وَص^{٢}$$

وباخذ الجذر التربيعى لطرفيه يوجد

$$وَق = \sqrt{وَس^{٢} + وَص^{٢}}$$

ق ح ه

* ٢٤١ تفاضل القوس من منحنٍ ذي احداثيات قطبية يوجد ايضا بغاية السهولة باعتبار الصغيرات جدا ولذلك نفرض (شكل ٨٢) ان ررَ و مه يكونان قوسين أحدهما وهو الاول من الدائرة المرسومة بنصف قطر يساوي الواحد وثانيهما من الدائرة المرسومة بنصف قطر يساوي ع ويكونان محصورين في الزاوية الصغيرة جدا مَام المشكلة من نصفي قطرين احتراقيين فمثلث همَم يمكن نظره كمثلث مستقيم قائم زاوية ه ويوجد حينئذ

ممَ = √(همَ² + هم²)

وبمراعاة كون مَه = وع و مه يساوي ع وى على مقتضى تناسب ١ : وى :: ع : مه

يجب أن نبدل همَ و مه بمقاديرها ونضع وقو محل ممَ فنجد

وقو = √(وع² + ع²وى²)

وبمقارنة مثلث ممَه المذكور بمثلث مَاط يحدث لنا تحت الظل للمنحني القطبي بواسطة تناسب

مَه : مه :: امَ : اط

واذا غيرنا امَ في هذا التناسب بخط ام الذي لا يختلف عنه الا بالصغير جدا حدث

وع : ع وى :: ع : اط ومنه يستخرج

اط = ع² وى / وع

طريقة لاجرانج لاثبات اصول حساب التفاضل من غير اعتبار النهايات والصغيرات جدا وكل كمية يجري حذفها

٢٤٢

٢ * لما كانت قضية تيلور كثيرة الفوائد والمنافع خصوصا
حل الدوال الى متسلسلات لاح للمعلم لاجرانج كون حصول حساب
صر فى هذه القضية ويحدث منها اوس ثم تماما من غير استعمال
فاضل بالطريقة لا تية وهى هذه

لتكن ص = د(س + هـ)

له تؤول بالطبع الى دس متى يجعل فيها هـ = ٠
ث وقعا متى كان الجزء المحتوى على هـ فى هذه المعادلة مكررا
. ولنبينه برمز ع هـ فمن ثم يكون

د(س + هـ) = س + ع هـ

بمكن أن تكون دالة لكمية هـ فاذ رمزنا برمز ع١
به ع حين يفرض فيها هـ = ٠ وكان ك هـ هو الجزء
او يرتبط بكمية هـ نجد ايضا ع = ع١ + ك هـ
هذا التبيان توجد هذه المعادلات المتوالية

ص = دس + ع هـ
ع = ع١ + ك هـ
ك = ك١ + ر هـ
الخ الخ الخ

دار ع المعلوم بالمعادلة الثانية فى المعادلة الاولى يحدث

ص = دس + ع١ هـ + ك هـ٢

يضع مقدار ك المعلوم بالمعادلة الثالثة فى هذا الناتج

ص = دس + ع١ هـ + ك١ هـ٢ + ر هـ٣

هكذا ووضع د(س + هـ) محل ص يوجد عموما

$$د(س+هـ)=د س+ع_١ هـ+ك_١ هـ^٢+ل_١ هـ^٣+م_١ هـ^٤+\cdots \text{ الخ } (١٣٣)$$

* ٢٤٣ * وكمية د (س + هـ) تبين على العموم الدالة التى لم تزل غير محولة الى متسلسلة فاذا غيرت فى هذه الدالة س بكمية س + ى حدث ناتج كما لو غيرت هـ بكمية هـ + ى لان هذه الدالة لا يمكن أن تحتوى على متغير س من غير أن يكون هذا المتغير متبوعا بكمية هـ بلا واسطة فى حد اسى كحد ل(س + هـ)^م مثلا يصير ل(س + ى + هـ)^م متى تغير س بكمية س + ى ولاشك ان هذا الناتج ككمية ل(س + هـ + ى)^م التى تنتج من وضع هـ + ى محل هـ فى دالة ل(س + هـ)^م وما ذكر فى شأن هذا الحد يطبق على ما بقى من الحدود و يتضح من ذلك أن الطرف الاول لمعادلة (١٣٣) يحدث نواتج متطابقة فى الحالتين و ينبنى عليه انه ينتج من حل د س + ع_١ هـ + ك_١ هـ^٢ + ‥ الخ نواتج متحدة بوضع س + ى محل س أو بوضع هـ + ى محل هـ

* ٢٤٤ * فبوضع هـ + ى أولا محل هـ فى حل د س + ع_١ هـ + ك_١ هـ^٢ + ‥‥ الخ يوجد

$$د س+ع_١(هـ+ى)+ك_١(هـ+ى)^٢+ل_١(هـ+ى)^٣+\cdots \text{ الخ } (١٣٤)$$

و بكتابة الحدين الاولين فقط من كل من هذه الكميات ذات الحدين يحدث

$$د س+ع_١ هـ+ع_١ ى+ك_١ هـ^٢+٢ك_١ هـ ى+ل_١ هـ^٣+٣ل_١ هـ^٢ ى+\text{الخ} (١٣٥)$$

ثم لايجاد الناتج من وضع س + ى محل س فى كمية د س + ع_١ هـ + ك_١ هـ^٢ + ل_١ هـ^٣ + ‥ الخ نراعى ان الزيادة هـ موجودة لا محالة فى هذه المتسلسلة ولا تدخل فى د س ولا فى المكررات ع_١ ، ك_١ ، ل_١ ، م_١ الخ التى هى كميات لا يمكن أن تحتوى الا على س ولذلك يمكن اعتبارها دوال لهذا المتغير أعنى س وحيث كانت معادلة (١٣٣) تقع لاى دالة للمتغير س فوضع س + ى فيها محل س بغير

[illegible]

و رصعنا مقادير [illegible]

متسلسلة [illegible]

[illegible]

* ٢٤٥ * و [illegible]

(١٣٢) على ما في بند (٢٤٣) فيلزم [illegible] تكون الحدود [illegible] على [illegible]

[illegible] متحدة في هذين الخطين [illegible]

[illegible] وحة [illegible]

في هذين الخطين

[illegible]

* ٢٤٦ * قدرنا في بند (٢٤٤) [illegible]

[illegible] ومن اجل [illegible] الذي يضرب في [illegible]

[illegible] يضرب في [illegible]

[illegible] ٦

د (سـ+هـ) = د سـ + هـ د′ سـ + الحدود المحتوية على هـ^{2} و هـ^{3} الخ
د′ (سـ+هـ) = د′ سـ + هـ د″ سـ + الحدود المحتوية على هـ^{2} و هـ^{3} الخ
د″ (سـ+هـ) = د″ سـ + هـ د‴ سـ + الحدود المحتوية على هـ^{2} و هـ^{3} الخ (١٣٨)
الخ الخ الخ الخ

* ٢٤٧ * وحيث كان ح$_{1}$ = د′ سـ بالفرض بند (٢٤٦)
فاذا جعلنا فى هذه المعادلة سـ = سـ + هـ حدث

ح$_{1}$ + ح′$_{1}$ هـ + ح″$_{1}$ هـ^{2} + ح‴$_{1}$ هـ^{3} + ... الخ = د′ (سـ+هـ) .... (١٣٩)

وبوضع مقدار د′ (سـ+هـ) المعلوم بثانية معادلات (١٣٨) فى هذه المعادلة يوجد

ح$_{1}$ + ح′$_{1}$ هـ + ح″$_{1}$ هـ^{2} + .. الخ = د′ سـ + هـ د″ سـ + الحدود المحتوية على هـ^{2} و هـ^{3} الخ

وحيث ان هذه المعادلة لا تزال حقيقية مهما كانت كمية هـ يلزم ان تكون الحدود المطابقة لقوى واحدة لحرف هـ متساوية واذن يوجد

ح′$_{1}$ = د″ سـ

ومقدار ح′$_{1}$ هذا يغير الاولى من معادلات (١٣٧) الى د″ سـ = ٢ ك$_{1}$
الذى يستخرج منه

ك$_{1}$ = $\frac{1}{2}$ د″ سـ

واذا غيرنا فى هذه المعادلة سـ بكمية سـ + هـ حدث

ك$_{1}$ + ك′$_{1}$ هـ + ك″$_{1}$ هـ^{2} + ... الخ = $\frac{1}{2}$ د″ (سـ+هـ)
ثم نضع محل د″ (سـ + هـ) حلها المعلوم بثالثة معادلات (١٣٨) فنجد

ك$_{1}$ + ك′$_{1}$ هـ + ك″$_{1}$ هـ^{2} + .. الخ = $\frac{1}{2}$ (د″ سـ + هـ د‴ سـ + الحدود المحتوية على هـ^{2} و هـ^{3} الخ)
ونطابق الحدود المضروبة فى القوة الاولى لكمية هـ فنجد ك′$_{1}$ = $\frac{1}{2}$ د‴ سـ
و بوضع هذا المقدار فى ثانية معادلات (١٣٧) يوجد $\frac{1}{2}$ د‴ سـ = ٣ ل$_{1}$
الذى يستخرج منه

$$\text{د}^\circ\text{سـ} \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \text{م}$$

وتستمر هكذا فتجد على التعاقب جميع مكررات معادلة (١٣٢) فتضع في تلك المعادلة مقادير $أ$ و $أ$ و $أ$ الخ فتجد

$$\text{د}(\text{سـ}+\text{هـ}) = \text{دسـ} + \text{هـ د}'\text{سـ} + \frac{\text{هـ}^٢}{١\times٢}\text{د}''\text{سـ} + \frac{\text{هـ}^٣}{١\times٢\times٣}\text{د}'''\text{سـ} + \text{الخ} \quad (١٤٠)$$

* ٢٤٨ * اذا اعتبرت الآن الاولى من معادلات (١٣٨) شوهد أن د'سـ هي المكرر لكمية هـ في حل د(سـ+هـ) ومن ثم تبين برمز $\frac{\text{و}\cdot\text{دسـ}}{\text{و}\text{سـ}}$ أو $\frac{\text{و}\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}}$ وكذلك باعتبار ثانية معادلات (١٣٨) يعرف ان المكرر د''سـ للقوة الاولى لكمية هـ في حل د'(سـ+هـ) يكون متبينا برمز $\frac{\text{و}\cdot\text{د}'\text{سـ}}{\text{و}\text{سـ}}$ اعني برمز $\frac{\text{و}\cdot\frac{\text{و}\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}}}{\text{و}\text{سـ}} = \frac{\text{و}^٢\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}^٢}$ وهكذا هذا واذا وضعت مقادير د'سـ و د''سـ و د'''سـ الخ هذه في معادلة (١٤٠) حدث

$$\text{د}(\text{سـ}+\text{هـ}) = \text{دسـ} + \frac{\text{و}\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}}\text{هـ} + \frac{\text{و}^٢\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}^٢}\frac{\text{هـ}^٢}{١\times٢} + \frac{\text{و}^٣\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}^٣}\frac{\text{هـ}^٣}{١\times٢\times٣} + \text{الخ} \quad (٢)$$

* ٢٤٩ * فها هو قد تبين قانون تيلور من غير استعمال حساب التفاضل وكمية $\frac{\text{و}\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}}$ الداخلة في هذا القانون تشير للعملية التي تستخرج بها مكرر هـ في حل د(سـ+هـ) وحين يوجد ذلك المكرر تبين لنا كميات $\frac{\text{و}^٢\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}^٢}$ و $\frac{\text{و}^٣\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}^٣}$ و الخ ان العملية المذكورة اذا كررت وأديت تستخرج منها مكررات باقي قوى هـ واذن لم تحتج الالمعرفة معنى $\frac{\text{و}\text{صـ}}{\text{و}\text{سـ}}$ وحقيقته في كل دالة بطرق جبرية فقط

حسب مثلا حقيقة $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ في الدالة $\text{س}^{\text{م}}$ تحال $(\text{س}+\text{هـ})^{\text{م}}$ بقانون الكمية ذات

حدين فيوجد $\text{س}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}\,\text{هـ} +$ الخ وحيث ان $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ يجب أن يكون

مبينا لمكرر القوة الاولى للكمية هـ في هذا الحل يوجد $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}$

ومن ثم يؤول الامر الى امكان ايجاد حل الدوال المتنوعة الممكن بيانها بالجبر بواسطة الطرق الحسابية وهذه الطرق لا تختلف عن الطرق التي شرحناها لحل الدوال على اختلافها والتي ينتج منها ما بقي بتعشقها ببعضها وبذلك بينا حلول

$\text{ح}^{\text{س}+\text{هـ}}$ و لوغا $(\text{س}+\text{هـ})$ و جتا $(\text{س}+\text{هـ})$ و الخ

* ٢٥٠ * ومن ثم صارت هذه الطريقة طريقة ثالثة من بعدها توجد اصول حساب التفاضل مبينة بوجه غير متعلق باعتبار النهايات والصغيرات جدا وكل كمية يحكم بحذفها ومع ذلك كله فلا غنى لهذه الطريقة عن طريقة النهايات لانه متى يجري تطبيقها ويراد مثلا تعيين الاجسام او السطوح وتعديل المنحنيات اوايجاد كميات تحت المماس وتحت العمودي الخ يستلزم الدخول في النهايات أو الصغيرات جدا

* ٢٥١ * لاعتبار حلول الدوال المتنوعة $(\text{س}+\text{هـ})^{\text{م}}$ و $\text{ح}^{\text{س}+\text{هـ}}$ و لوغا $(\text{س}+\text{هـ})$ و جا $(\text{س}+\text{هـ})$ و الخ التي تعلم من علم الجبر يقال حيث ان هذه الدوال محدودة العدد يسهل معرفة كون مكرر القوة الاولى للكمية هـ في حلولها لا يكون صفرا ولا غير منته مادام الى س مقدارها غير المعين وذلك ينتج من الاثبات السابق لانه اذا فرضنا $\text{ح}_١ = ٠$ في معادلة

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{د}\,\text{س} + \text{ح}_١\,\text{هـ} + \text{ك}_١\,\text{هـ}^٢ + \text{ي}_١\,\text{هـ}^٣ + \cdots \text{الخ}$$

تقع حالتان وهما اما أن يعلم مقدار س الداخل في $\text{ح}_١$ بمعادلة

متطابقة

تكون الدالة المذكورة متطابقة أو ثابتة لانه يعرف انه اذا كانت دَس بهذه الصورة سَ² ـــ سَ³ مثلا او كانت على صورة ث + سَ² ـــ سَ³ ثم وضع س + ه محل س يحدث ناتجا واحدا أبدا و يشاهد أن الدالة تكون فى الحالة الاولى متطابقة وتؤول فى الثانية الى كمية ثابتة ث وينبنى على هذا وذاك أن مكرر القوة الاولى لكمية ه لا يمكن أن يكون صفرا فى الحل العمومى لدالة (س + ه)

ولا يستحيل فرض هذا المكرر غير محدود لانه حين يكون الطرف الثانى لمعادلة (١٣٣) غير محدود يكون الطرف الاول كذلك يعنى انه يكون د (س+ه) = ∞ وحيث ان د (س+ه) تتركب من س + ه كما تتركب دَس من س فالحد الداخل فى د(س+ه) الذى يجعلها غير محدودة يجعل ايضا دَس غير محدودة ومثاله انه اذا كانت د(س+ه) تحتوى على حد غير محدود ولكن س ن ـ ه ـ $\frac{ل}{(س+ه)}$ يقتضى أن تكون دَس محتوية ايضا على حد س ل ن ـ ن يكون غير محدود كذلك وينتج من ذلك أن الدالة المفروضة تكون غير محدودة ولا نفرض ذلك

* ٢٥٢ * كميات دَس و دً س و دٌ س و الخ هى التى سماها لاجرانج الدالة الاولى والدالة الثانية والدالة الثالثة و الخ لدالة س وعلى العموم تسمى بالدوال المشتقة وقد بين لاجرانج المذكور ايضا الدوال المشتقة بوجه آخر بابدال $\frac{ء صـ}{ء س}$ برمز صَ و $\frac{ء^{٢} صـ}{ء س^{٢}}$ برمز صً و $\frac{ء^{٣} صـ}{ء س^{٣}}$ برمز صٌ وهلم جرا

(فى الحالات التى يختل فيها قانون تيلور)

* ٢٥٣ * عموما متى توضع سَ + ه محل س فى دالة لمتغير س فان صورة هذه الدالة تبقى متحدة حيث ان س+ه تدخل

فى جميع المواضع التى كانت فيها س وتذا متى احتوت د س على جذر كانت د(س + هـ) مشتملة على هذا الجذر أيضا

فاذا كانت $د س = س^{٢} + \frac{ح}{\sqrt{س}}$ مثلا فان الجذر يوجد نفسه فى كمية

$$د(س+هـ) = (س+هـ)^{٢} + \frac{ح}{\sqrt{س+هـ}}$$

* ٢٥٤ ولا يكون كذلك دائما اذا أخذت س مقدارا خصوصا (والمراد به متعينا) مثلا اذا كان $\sqrt[٣]{س - ح}$ يدخل فى د س يلزم أن تشتمل د(س+هـ) على حد

$$\sqrt[٣]{س + هـ - ح}$$

ولكن $\sqrt[٣]{س - ح}$ يحذف من د س بفرض س = ح ولا يحذف $\sqrt[٣]{س - ح + هـ}$ الداخل فى د(س+هـ) بهذا الفرض بل يؤول الى $\sqrt[٣]{هـ} = هـ^{\frac{١}{٣}}$ واذن يشتمل حل د(س+هـ) على جذر لا يوجد فى د س ولا يمكن حله بحسب القوى الصحيحة لكمية هـ وعدم الامكانية هذه تحقق بالمقادير غير المحدودة التى تأخذها المكررات التفاضلية مثلا اذا وجدت معادلة

$$ص = \sqrt[٣]{س - ح}$$

فانه يكون باخذ تفاضلها

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{١}{٣}(س - ح)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س - ح)^{٢}}}$$

ويرى ان مقدار هذا المكرر التفاضلى يصير غير محدود متى تجعل س = ح

* ٢٥٥ * ولكن على العموم

$$د(ح+هـ) = ع + ع' هـ + ع'' هـ^{٢} + ع''' هـ^{٣} \cdots + ع^{م} هـ^{م} + \cdots هـ^{\frac{ن}{ع}} + \cdots الخ$$

الحل الذى يوجد بجعل س = ح والذى فيه ن + ع بين كيه
تقع بين ن و ن + ١ فنثبت الآن ان المكرر التفاضلى برتبة ن + ١
غير محدود ولاجل ذلك ننظر ح كمتغير فنجد على ما فى بندى (٥٣) و (٥٤)

$$\frac{و\cdot د(ح+هـ)}{و ح} = \frac{و\cdot د(ح+هـ)}{و هـ} \text{ و } \frac{و^٢\cdot د(ح+هـ)}{و ح^٢} = \frac{و^٢\cdot د(ح+هـ)}{و هـ^٢} \text{ الخ } (١٠٣)$$

ثم نأخذ تفاضل معادلة (١٤٢) بالتوالى بالنسبة الى هـ ونرمز لاجل الاختصار برموز مَ و اَ و مً و اً والخ لما تؤول اليه المكررات م و ا عندذلك فنجد

$$\frac{و\cdot د(ح+هـ)}{و هـ} = عَ + ٢ عً هـ + ٣ عٍ هـ^٢ \cdots + مَ هـ^{ن-١} + اَ هـ^{ن+\frac{١}{ع}-١} + \text{ الخ}$$

$$\frac{و^٢\cdot د(ح+هـ)}{و هـ^٢} = ٢ عً + ٢\times٣ عٍ هـ \cdots + مً هـ^{ن-٢} + اً هـ^{ن+\frac{١}{ع}-٢} + \text{الخ}$$

الخ و الخ و الخ و الخ

وتبدل الاطراف الاول لمعادلات الاخيرة هذه بمقاديرها المستخرجة من معادلات (١٤٣) فيحدث لنا

$$\frac{و\cdot د(ح+هـ)}{و ح} = عَ + ٢ عً هـ + ٣ عٍ هـ^٢ + مَ هـ^{ن-١} + اَ هـ^{ن+\frac{١}{ع}-١} + \text{الخ} \quad (١٤٤)$$

$$\frac{و^٢\cdot د(ح+هـ)}{و ح^٢} = ٢ عً + ٢\times٣ عٍ هـ \cdots + مً هـ^{ن-٢} + اً هـ^{ن+\frac{١}{ع}-٢} + \text{الخ} \quad (١٤٥)$$

الخ الخ الخ الخ

ثم نجعل هـ = ٠ فى معادلات (١٤٢) و (١٤٤) و (١٤٥) و الخ فيوجد

$$د ح = ع \text{ و } \frac{و د ح}{و ح} = عَ \text{ و } \frac{و^٢ د ح}{و ح^٢} = ٢ عً \text{ و الخ}$$

وذلك

ونشير الى تعيين المكررات ـ و خ و ـ خ الخ المعادلة (١٠٣) هذه ومن بعد معرفة معادلات (١٤٤) و (١٤٥) يعرف انه تنقص واحد في كل مرة تفعل التفاضل ومتى يؤدى الى التفاضل نون ـ ج .

$$\frac{\text{و}^{ن}\cdot\text{د}(\text{ح}+\text{هـ})}{\text{و}\text{ح}} = \ldots + \text{خ}$$

ونجد لاجل التفاضل الآتي بعد

$$\frac{\text{و}^{ن}\text{د}(\text{ح}-\text{هـ})}{\text{و}\text{ح}^{ن+١}} = \text{هـ}^{\frac{١}{ع}-١} + \text{خ}$$

وحيث كان $\frac{١}{ع}$ أقل من الواحد فكمية $\frac{١}{ع}-١$ تدل على عدد سالب ويمكن حينئذ كتب المعادلة السابقة هكذا

$$\frac{\text{و}^{ن}\cdot\text{د}(\text{ح}-\text{هـ})}{\text{و}\text{ح}^{ن+١}} = \frac{\ldots}{\text{هـ}^{(١-\frac{١}{ع})}} + \text{خ}$$

وعلى موجب ذلك متى يجعل هـ = ٠ لاجل تعيين مكرر احد حدود معادلة (١٤٣) يوجد

$$\frac{\text{و}^{ن}\cdot\text{د}(\text{ح})}{\text{و}\text{ح}^{ن+١}} = \frac{١}{٠} = \infty$$

ويكون كذلك متى يراد تعيين مكررات تفاضلية مرتبة على اداتع من د . فنتيجة انه متى يجعل س = ح في حل د(س + هـ) ان وجدت قوة كسرية لكمية هـ فان هذا الحل رتب تصور بين حدود المتبوعة بكميتى هـ^{ن} و هـ$^{ن-}$ فلا يمكن تعيين حدود متناسبة تجرى على

درجة ن وهو اى الحدّ الذى درجته ن من ضمنها وجميع الحدود لاخر تصير غير محدودة

* ٢٥٦ * المفروض دالة لمتغير س متبينة برمز دس ويراد تعيين حل د(س+هـ) فى حالة فرضية س = ح ولذلك لزم كما تبين ان تحسب حدود متسلسلة

$$\text{دس} + \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2} + \cdots\cdots \text{ الخ}$$

ولكن اذا صار بعمل هذا الحساب احد المكررات التفاضلية غير محدود فى حال فرضية س = ح فلا يبحث عن حل د(س+هـ) بمتسلسلة تيلور وها هى الطريقة اللازم استعمالها

يوضع س + هـ محل س فى دس فحينئذ يحتوى الحد الذى كان يشتمل على س−ح فى المقام على س−ح+هـ ولا يصير غير محدود متى تجعل س=ح لكنه ينشأ منه حد متبوع بقوة كسرية لكمية هـ

* ٢٥٧ * وليكن مثلا

$$\text{دس} = 2\text{ح}\,\text{س} - \text{س}^{2} + \text{ح}\sqrt{\text{س}^{2} - \text{ح}^{2}}$$

فبأخذ التفاضل يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = 2(\text{ح} - \text{س}) + \frac{\text{ح}\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{2} - \text{ح}^{2}}}$$

وبوضع هذه المقادير ومقادير $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}$ و $\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{وس}^{3}}$ و الخ

فى قانون تيلور بند (٥٥) يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = 2\text{ح}\,\text{س} - \text{س}^{2} + \text{ح}\sqrt{\text{س}^{2} - \text{ح}^{2}} + \left[2(\text{ح} - \text{س}) + \frac{\text{ح}\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{2} - \text{ح}^{2}}}\right]\text{هـ} + \text{الخ}$$

وحيث ان الحد المضروب فى هـ يصير غير محدود متى تجعل س = ح

فهذا

فهذا الحل يكون غير ممكن

وفي هذه الحالة يوضع من بعد القاعدة السابقة س [illegible] محل س

في معادلة د س = [illegible] فيوجد

د(س+هـ) = [illegible]

وهذه المعادلة تصير بوضع س = ح

د(ح−هـ) = [illegible] و

د(ح+هـ) = [illegible]

ونحل بقانون الكميات [illegible] المعادلة [illegible] لاجل

اختصار [illegible]

[illegible]

[illegible]

ونضع هذا المقدار في المعادلة الاخيرة فتصير

د(ح+هـ) = [illegible]

ويشاهد بهذا المثال انه بوضع س+هـ [illegible]

يمكن ادخال قوة او جملة قوى كسرية [illegible]

[illegible] لا تكرر [illegible]

[illegible]

* ٢٥٨ * وقد ثبت لا يتيسر ان حل د(س+هـ) [illegible]

حدود متنوعة قوة كسرية الى هـ [illegible]

ولذلك يفرض د(س+هـ) = د س + [illegible]

وحيث كان [illegible] يقبل ثلاث مقادير [illegible]

توجد هذه الحلول الثلاث لدالة (س+هـ)

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ب}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ب}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ب}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ع}$$

لكن دس ينبغى أن تحتوى على جذور واحدة كدالة (س + ه) كما فى بند (٢٥٣) فيلزم أن يكون لدالة س ايضا ثلاث مقادير مختلفة ك و ر و و وبوضع هذه المقادير على التوالى محل دس يوجد حينئذ

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ك} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ك} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ك} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ع}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ر} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ر} + \text{ب}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ر} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ع}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{و} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{و} + \text{ب}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{و} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \text{ع}$$

واذن توجد لدالة (س+ه) بحلها تسع مقادير مختلفة بخلافهما غير شاملة فانه لا يوجد لها الا بقدر ما للدالة س من المقادير وعلى ذلك يكون لها ثلاثة فى الحالة الاتية وحينئذ لا يمكن أن يفرض ان حل د(س+ه) يحتوى على أس كسرى لكمية ه من غير الوقوع فى المناقضة

* ٢٥٩ * وتسهل البرهنة ايضا على ان د(س+ه) لا يمكن أن تشتمل فى حلها على حد متبوع بأس سلبى لكمية ه لانها اذا كانت تحتوى على حد كحد $\text{م}\,\text{ه}^{-\text{ن}}$ يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ح}_{١}\text{ه} + \text{ك}_{١}\text{ه}^{٢} \cdots\cdots + \frac{\text{م}}{\text{ه}^{\text{ن}}}$$

ويجعل

[illegible]

[illegible]

[illegible]

تم

ولما كان هـذا آخر ما اورده المؤلف فى حساب التفاضل ان لنا أن نشرح الملحوظات المعبر عنهـما فى باطن هـذا الكتاب ثم نلحقهـما بقضايا لطيفة للمشروحات المسائلة تتعلق بعلم الضوء للامير بيك ناظر مدرسة المهندسخانة الخديويه ببولاق فنقول

الملحوظة الاولى (بند ٥٩)

على كيفية ايجاد حل لوغاريتم سـ + هـ

هاهى أحد الطرق المستعملة لايجاد لوغاريتم سـ + هـ

يبحث اولا عن لوغا (١ + سـ) بالكيفية الآتية وهى أن يساوى لوغا (١ + هـ) بجملة حدود مرتبة بحسب قوى سـ بأن يراعى اولا انه لا يوجد فى هذه المتسلسلة حد غير معلق بتغير سـ لانه اذا وجد

لوغا (١ + سـ) = ع + حسـ + حَسـ٢ + ... الخ

فهـذه المعادلة لاتزال متحققة مهما كان متغير سـ وينتج منها انه بجعل سـ = ٠ فيما يوجد

ع = لوغا ١ = ٠

ولذا نضع

لوغا (١ + سـ) = ع سـ + حسـ٢ + حَسـ٣ + حًسـ٤ + .. الخ (١)

وبتغيير سـ بكمية ز يوجد كذلك

لوغا (١ + ز) = ع ز + ح ز٢ + حَ ز٣ + حً ز٤ + ... الخ

وحيث كانت ز حيث ما اتفقت فيمكن فرض هذه المعادلة (١ + سـ)٢ أو ١ + ٢سـ + سـ٢ = ١ + ز بين سـ و ز ثم يستخرج منها مقدار ز ويوضع فى معادلة (١) فيوجد

لوغا (١ + سـ)٢ = ع (٢سـ + سـ٢) + ح (٢سـ + سـ٢)٢ + حَ (٢سـ + سـ٢)٣ + الخ

وبواسطة الحل والترتيب بحسب قوى سـ يكون

لوغا

لوغا(١+س)٢ = ٢ح س + ح { س٢ + ٤ د ... } + ... (١)

وغير ذلك حيث ان خاصية اللوغار يتم مبينة فى هذه المعادلة لوغ د = ... د
نجد

لوغا(١+س)٢ = ٢(ح س + د س٢ + د س٣ + ... الخ)

وبوضع مقدار لوغا (١+س)٢ هذا فى الطرف الاول لمعادلة (١) نجد
معادلة تحقق بجميع المقادير التى تعطى الى متغير س واذن يحدث بمساواة
الحدود المتبوعة بقوى متحدة لحرف س ببعضها

٢ح = ٢ح و ح + ٤د = ٢د و ٤د ... = ... الخ

ويستخرج من ذلك

د = − ح/٢ و د = − ح/٣ = ح/٤ و الخ

وبوضع هذه المقادير نجد

لوغا (١+س) = ح (س + س٣/٣ + س٢/٢ + س٤/٤ ... الخ) ... ث

ومتى يكون س = ٠ يوجد لوغا ١ = ٠ = ث وبعلم من ذلك انه
لا يوجد كمية ثابتة ينبغى اضافتها

واذا جعلنا س = هـ/س نجد

لوغا (١ + هـ/س) او لوغ (س + هـ)/س و

لوغا(س+هـ) − لوغا س = ح (هـ/س + هـ٢/٢س٢ + هـ٣/٣س٣ + ... الخ)

وبالقسمة على هـ يكون

[لوغا(س + هـ) − لوغ س] / هـ = ح (١/س + هـ/٢س٢ + هـ٢/٣س٣ + ... الخ)

وبالارتقاء الى النهاية نجد

$$\frac{\text{ق}\,\text{لوغا}\,\text{س}}{\text{ق}\,\text{س}} = \frac{\text{ح}}{\text{س}}$$

ومن ثم يكون تفاضل لوغ س هكذا ح $\frac{\text{ق س}}{\text{س}}$ ونظرا ان ثابتة ح ليست

اى اختيارية

* الملحوظة الثانية (بند ٢٤٥)*

على القاعدة الاساسية لطريقة المكررات الغير المتعينة يمكن الاثبات بالوجه الآتى على انه متى تكون المعادلة التى كمعادلة

$$\text{ح}\,\text{س}^{٤} + \text{ح}\,\text{س}^{٣} + \text{حَ}\,\text{س}^{٢} + \text{حً}\,\text{س} + \text{و} = ٠ \quad (٣)$$ مثلا

متحققة مهما كانت س يلزم أن يكون كل من المكررات ح و ح و حَ و حً و و صفرا لانه حيث كانت س تقبل اى مقدار كان يمكن وضع $\text{س} = ٠$ وتؤول معادلة (٣) حينئذ الى $\text{و} = ٠$

ولما كانت و غير متعلقة بتغير س فتكون صفرا ايضا متى لاتكون س صفرا وينتج من ذلك ان معادلة (٣) تختصر الى هذه

$$\text{ح}\,\text{س}^{٤} + \text{ح}\,\text{س}^{٣} + \text{حَ}\,\text{س}^{٢} + \text{حً}\,\text{س} = ٠$$

وباسقاط المضروب المشترك س يبقى

$$\text{ح}\,\text{س}^{٣} + \text{ح}\,\text{س}^{٢} + \text{حَ}\,\text{س} + \text{حً} = ٠$$

ثم نطبق ماذكر بخصوص معادلة (٣) على هذه المعادلة فيتضح لنا ان حً تكون صفرا وبالمداومة هكذا يظهر على التعاقب كون المكررات الاخر تكون كذلك

* (فى المفرودات المماثلة للامبير) *

فى البحث عن منحنيات الانعكاس المستوية المسماة كوستيك الملف المشترك لجميع الخطوط العمودية على خط منحن مستو هو المسمى مفرود هذا المنحنى ونقطة تماس هذا الملف بكل عمود يقال لها مركز

الانحنا

[illegible]

[illegible] مستقیم [illegible]

[illegible]

[illegible] مستقیم [illegible]

[illegible]

[illegible]

الانحنا المطابقة لاحد مفرودات هذا المنحنى المائلة ولكن و تقاطع حَمَ و اَم هذا ونجعل نقطة مَ مركزا وببعدها عن نقطة م يرسم قوسا من دائرة ينتهى فى ا على امتداد اَمَ ثم يرمز برمز قو للقوس من المنحنى ممَ المعدود من م نحو مَ ويرمز قو للقوس من المنحنى اَاَ المحسوب من اَ نحو اَ ويرمز نق لنصف قطر الانحنا العمودى حم ويرمز نقَ لنصف قطر الانحنا المائل اَم ويرمز ب لزاوية حماَ الواقعة بين نصفى قطرى الانحنا هذين ويرمز ع لذى الاربعة اضلاع المحدود بخطوط مستقيمة ومنحنية م ح حَ مَ ويرمز عَ لذى الاربعة اضلاع م اَ اَ مَ

فاذا فرضنا نقطة مَ قريبة جدا من نقطة م فنقط حَ و اَ تكون كذلك قريبة جدا لنقط ح و اَ واقواس ححَ و اَاَ يمكن اعتبارها كالامتدادات المستقيمة لخطى مح و ماَ على الولا ومساحات م ح حَ مَ و م اَ اَ مَ يمكن اعتبارها ايضا كقطاعات بسيطة اوكمثلثات كذلك وما كخط عمودى على اَم اوعلى اَمَ فيوجد فى هذه الحالة

ممَ = وقو و ححَ = و نق و اَاَ = و قو

مَحَ = نق + و نق و مَ اَ = نقَ + و نقَ وزاوية حَمَ اَ = ب + و ب

ثم بعد ذلك يوجد أن

ما = ممَ جتا ب = و قو جتا ب و مَ ا = ممَ جا ب = و قو جا ب

ولكن

اَم + اَاَ = اَم = اَا = اَمَ + مَ ا

فيوجد بالوضع حينئذ

نقَ

نق + و١قو = نق + و١نق + و١قو جتب وبالاختصار يحدث

و١قو = و١نق + جب و١قو .... (١)

ويوجد ايضا

زاوية م ح و = ... = $\frac{\text{و١قو}}{\text{نق} + \text{و١}}$ وزاوية م و = ... = $\frac{\text{و١قو جتاب}}{\text{نق و١و}}$

ولكن بسبب تساوي زاويتي مثلثي م و ح و م و المتبادلة يوجد

زاوية و م ح + زاوية و ح م = زاوية و م + زاوية و

واذن يكون بالاستبدال

ب + $\frac{\text{و١قو}}{\text{نق} + \text{و١نق}}$ = (ب + و١ب) + $\frac{\text{و١قو جتاب}}{\text{نق} + \text{و١و}}$ وباسقاط

المشترك من الطرفين يكون

$\frac{\text{و١قو}}{\text{نق} + \text{و١نق}}$ = و١ب + $\frac{\text{و١قو جتاب}}{\text{نق} + \text{و١قو}}$ وبحذف المقامات يكون

(نق + و١قو) و١قو = (نق + و١نق) (نق - و١قو) و١ب + (نق + و١نق) و١قو جتاب

وبحل هذه الضروب واسقاط الحدود المشتملة على التفاضلات بدرجات دون الواحد وقسمة جميع الحدود على و١قو يحدث

$\frac{\text{و١ب}}{\text{و١قو}}$ = ... (٢)

ويوجد اخيرا

قطاع م ح م = ... م م × ح م و قطاع م م = ... يعني

و اع = ـ ر ق + و انق) و اقو و و اعَ = $\frac{1}{2}$ (رب + و ا ب) و اقو جتا ـ

وبواسطة الحدود المشتملة على القوى الثانية للتفاضلات يكون

و ب = ـ قو قو ٠ (٢) و و اعَ = $\frac{1}{2}$ ن و قو حتاب ٠٠٠٠ (٤)

وهذه القوانين تريح اص به لايجاد بواسطة الطرق الاعتيادية الهندسية المذكورة هي ممتحن كما هو مشروح رسمه ولكن يتيسر في جميع الحالات أن تعبر فيها العلامات التي تستدعي احوال خصوصيه يمكن ايجادها فيها

و يوجد لاجل المفرودين المائلين لمنحن واحد مفروض جملتان من المعادلات المتماثلة يعني انه بالتأشير بالعلامات على الصور المتعلقة بالمفرود الثاني المائل نجد بين الفرايين الاخر هذه الاربع معادلات

و اقو = و انق + ن اقو جتاب ٠٠ (١) و و اقوَ = و انوَ + و اقو حتاب (٢)

$$\frac{\text{واب}}{\text{واقو}} = \frac{1}{\text{ن}} - \frac{\text{حتاب}}{\text{نو}_1} \quad (\ ) \quad \text{و} \quad \frac{\text{وابَ}}{\text{واقو}} = \frac{1}{\text{ن}} - \frac{\text{حتابَ}}{\text{ب}_1} \quad (٣)$$

ويمكن فرض كون انصاف أقطار الانحناء لاحد الجملتين تكون الاشعة الساقطة المماس جميعها لاحد المفرودات المائلة والمنحنى المفروض يكون هو المنحنى المعكس او الفارق للمادتين المتجانستين بشدة مختلفة وكون انصاف الاقطار الانحنائية المائلة للجملة الاخرى تكون هي الاشعة المنعكسة او المنكسرة عند مقابلتها هذا المنحنى والمماس جميعها بالمفرود المائل الآخر الذي يكون بهذا الوجه هو الكاوستيك بالانعكاس او بالانكسار حال كونه متكونا من انصاف الاقطار هذ

ولاجل ذلك يلزمنا بحسب قواعد الضوء أن نربط معادلة $\frac{\text{حاب}}{\text{حابَ}} = \frac{\text{ف}}{\text{فَ}}$ (٥)

التي فيها رمزا ف و فَ يبينان عددين ثابتين لا يختلفان في حالة الانعكاس الخصوصية عن بعضهما الا في الاشارة بالاربع معادلات المرقومة

اعلاه

المنحنى الفاصل

وان وضعنا معادلة (٦) بهذه الصورة

$$\frac{\text{جا بَ جتا أَ}}{\text{نقَ}_{\text{أ}}} - \frac{\text{جا بَ جتا أب}}{\text{نق}_{\text{أ}}} = \frac{\text{جا ب جتا بَ} - \text{جا بَ جتا ب}}{\text{نق}}$$

ووضع فيها مقدار جا بَ المستخرج من معادلة (٥) عوضا عنه صارت تلك المعادلة منقسمة على جا ب وتؤول الى

$$\frac{\text{ف جتا أَ}}{\text{نقَ}_{\text{أ}}} - \frac{\text{فَ جتا أ}}{\text{نق}_{\text{أ}}} = \frac{\text{ف جتا بَ} - \text{فَ جتا ب}}{\text{نق}} \cdots\cdots (٧)$$

واذا فرضنا الآن ان زاوية السقوط تكون صفرا فمعادلة (٥) تبين ان زاوية الانكسار تكون كذلك ولذا يوجد

جتا ب = جتا بَ = ١ وبه تؤول معادلة (٧) الى

$$\frac{\text{ف}}{\text{نقَ}_{\text{أ}}} - \frac{\text{فَ}}{\text{نق}_{\text{أ}}} = \frac{\text{ف} - \text{فَ}}{\text{نق}} \cdots\cdots\cdots (٨)$$

وحينئذ متى تكون الاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة فان هذه المعادلة تحدث بالسهولة التامة النقطة التي توجد على نصف القطر العمودي من الكوستيك بالانكسار وهذه النقطة هي التي تسمى بالنقطة الاحتراقية متى يكون المنحنى الفاصل دائرة

واذا فرض في حالة الدائرة ان النقطة الشعاعية تكون على بعد غير محدود فمعادلة (٨) تؤول الى

$$\frac{\text{ف}}{\text{نقَ}_{\text{أ}}} = \frac{\text{ف} - \text{فَ}}{\text{نق}} \quad \text{الذى يستخرج منه} \quad \text{نقَ}_{\text{أ}} = \frac{\text{ف}}{\text{ف} - \text{فَ}}\,\text{نق} \quad (٩)$$

وبهذا تعرف موضع النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية وتسمى هذه النقطة الاحتراقية في هذه الحالة النقطة الاحتراقية الاصلية

واذا فرض في معادلة (٨) ايضا ان الخط الفاصل يصير خطا مستقيما

أو

وان نق يكون غير محدود آلت [illegible] لمعادلة بالاختصار الى

[illegible] = [illegible] = [illegible] ... (١)

وحينئذ تكون ابعاد النقطة الشعاعية [illegible]

الحاصل فانه [illegible]

الاكسر [illegible]

وان كانت [illegible] بعد [illegible]

مرة او جملة مرات [illegible]

[illegible] حيث [illegible]

الذي تكون الاشعة [illegible]

بواسطة الطرق التي [illegible]

اعتبر [illegible] (٥ او ٦) [illegible]

الناتج من الاشارات متعاقبة كيف ما يرد

ولاجل ان [illegible]

[illegible] بالتصيب [illegible]

من النقطة [illegible]

و [illegible]

ويوجد [illegible]

الشية [illegible]

الزوايا لسقوط [illegible]

و [illegible] (٥) و (٦) [illegible]

$$\frac{\text{جاب}}{\text{جابَ}} = \frac{\text{ف}}{\text{فَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جابً}}{\text{جابَ}} = \frac{\text{فً}}{\text{فَ}}$$

$$\frac{\text{فجتاآبَ}}{\text{آ}} - \frac{\text{فَ جتاآب}}{\text{نق}_{\text{ا}}} = \frac{\text{فجتابَ} - \text{فَ جتاب}}{\text{نق}}$$

$$\frac{\text{فً جتاآبً}}{\text{آ}} - \frac{\text{فً جتاآبَ}}{\text{نق}_{\text{ا}}} = \frac{\text{فً جتابَ} - \text{فً جتابً}}{\text{نقَ}}$$

ويستخرج من الاخيرتين

$$\text{نقَ}_{\text{ا}} = \frac{\text{ف جتاآبَ}}{\frac{\text{فَ جتاآب}}{\text{نق}_{\text{ا}}} + \frac{\text{ف جتابَ} - \text{فَ جتاب}}{\text{نق}}}$$

$$\text{نقً}_{\text{ا}} = \frac{\text{فً جتاآبً}}{\frac{\text{فً جتاآبَ}}{\text{نقَ}_{\text{ا}}} - \frac{\text{فً جتابَ} - \text{فً جتابً}}{\text{نقَ}}}$$

ولكن هنا $\text{نقَ}_{\text{ا}}$ و $\text{نقً}_{\text{ا}}$ لهما جهة واحدة تشتمل على نقطتى السقوط فاذن يكون البعد بين هاتين النقطتين الاخيرتين مساويا لجمعهما او لفرقهما وبالرمز بحرف هَ لهذا البعد يوجد حينئذ

$$\frac{\text{جتاآبً}}{\text{نقً}_{\text{ا}}} = \frac{\text{ف جتاآبَ}}{\frac{\text{فَ جتاآب}}{\text{نق}_{\text{ا}}} + \frac{\text{ف جتابَ} - \text{فَ جتاب}}{\text{نق}}} \pm \text{هَ} - \frac{\text{فً جتابَ} - \text{فً جتابً}}{\text{نقَ}} \quad (11)$$

وهو القانون الذى يخدم باعتبار $\text{نقً}_{\text{ا}}$ فيه مجهولا لايجاد الكوستيك الذى يحدث من انكسارين متواليين بالمقط بلا واسطة من غير الاحتياج الى رسم الكوستيك المتوسط

اذا كان السطحان الفاصلان وجهين لجسم واحد شفاف يلزم أن تربط بمعادلة (١١) المعادلة المضاعفة هذه

جاب

$$\frac{\text{جاب}}{\text{جابَ}} = \frac{\text{جابٌ}}{\text{جابٌ}} = \frac{\text{ف}}{\text{فَ}} \quad \ldots\ldots (\ )$$

واذن يمكن اعتبار ...

باى جنس ... فى العادة

ويستخرج من معادلتى (١) و (١) ...

$$\frac{\text{وا قو} - \text{وا ق}}{\text{و قوَ} - \text{وا قَ}} = \frac{\text{جاب}}{\text{جابَ}} = \frac{\text{ف}}{\text{فَ}}$$

...

$$\frac{\text{وا قو} - \text{وا ق}}{\text{ا}} = \frac{\text{و قوَ} - \text{و قَ}}{\text{ف}}$$

...

$$\frac{\text{قو} - \text{ق}}{\text{ا}} \qquad \frac{\text{قوَ} - \text{قَ}}{\text{ف}}$$

...

لا ... الساقطة ...

... جد

...

$$\frac{\text{قو} - \text{ق}}{\text{ا}} = \frac{\text{قوَ} - \text{قَ}}{\text{ف}}$$

... طلب ما يكون ... الاصل ...

... بعد ... نقطة ...

... (١٣) ...

$$\frac{\text{أق}^{٢}}{\text{ن}} - \frac{\text{أق}'^{٢}}{\text{ن}'} = \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ف}} - \frac{\text{نق}'^{٢}}{\text{ف}'} = \text{ثابتة} \quad \cdots\cdots \quad (١٤)$$

وهذه هى المعادلة الارتباط الكائن بين ابعاد أق و أق َ لنقط مختلفة من المنحنى المطلوب عن نقطتين ثابتتين معلومتين فينتج من ذلك بسهولة ان معادلة ذلك المنحنى باحداثيات عمودية ترتفع الى الدرجة الرابعة وانواع هذه المنحنيات كانت مسماة خطوط ابلانيتيك للمعلم كتلى الذى هيآ لها جملة مباحث غريبة فى مراسلاته وفى كتبه أو دفاتره الخاصة

وجميع ماذكر يطبق بلاواسطة على الانعكاس بفرض بَ = ـــ ب فقط الذى ينتج منه

$$\text{جابَ} = -\text{جاب} \quad \text{و} \quad \text{جتابَ} = \text{جتاب} \quad \text{و} \quad \text{فَ} = -\text{ف}$$

وحينئذ متى كانت الاشعة الساقطة مماسة بكليتها لمنحن واحد ورمزنا برمز $\text{نق}_{١}$ لطول الشعاع الساقط المحسوب من ابتدا هذا المنحنى الى نقطة السقوط وبرمز $\text{نق}'_{١}$ لطول الشعاع المنعكس المحسوب من ابتدا نقطة السقوط الى الكوستيك ورمزنا اخيرا برمز نق لنصف قطر الانحنا للمنحنى المعكس فى نقط السقوط توجد معادلة (٦) هكذا

$$\frac{١}{\text{نق}_{١}} + \frac{١}{\text{نق}'_{١}} = \frac{٢}{\text{نق جتاب}} \quad \cdots\cdots \quad (١٥)$$

وهو قانون سهل لاجل رسم الكوستيك بالانعكاس بواسطة النقط متى يعلم المنحنى المعكس والمنحنى الذى تماسه الاشعة الساقطة وترجع الى هذه المسئلة المسئلة التى يعلم فيها منحنى جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه واذا اعتبرنا الشعاع الساقط العمودى على المنحنى المعكس بحدته توجد معادلة (٨) هكذا

$$\frac{١}{\text{نق}_{١}} + \frac{١}{\text{نق}'} = \frac{٢}{\text{نق}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١٦)$$

وبذلك

وبذلك تتعين النقطة الاحتراقية في المرائيات المرئية و... النقطة الاحتراقية الاصلية او النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية توجد معادلة (٩)

$$ن ق = \frac{ن ق}{٢} \quad \cdots\cdots (١٧)$$

واذا صار الخط المعكس مستقيما وكانت النقطة الشعاعية حيثما تفق حدث

$$ن ق = — ن ق \quad \cdots\cdots (١)$$

وبالجملة فيتوصل بواسطة معادلة(١٥) الى تعيين جهة الكوستيك الذي يحدث من عدد انعكاسات متوالية حيثما اتفق بدون الاحتياج الى رسم الكوستيكات المتوسطة واما من قبل الخط الابلانتيك بالانعكاس فانه يكون معلوما(١٤) بمعادلة

$$ن ق + ن ق = ثابتة$$

يعني ان هذا الخط يكون قطعا ناقصا اوقطعا زائدا بحسب كون ن ق و ن ق متحدة في الاشارة او مختلفة فيها وعلى ذلك يكون قطعا مكافئا متى كانت احدى النقطتين الثابتتين بعيدة غاية البعد

اذا فرض ن ق ثابتا في قوانين (٦) و (١) ووضع ق و = ٠ فيها فان هذه القوانين تدخل وتنحصر في قوانين المعلم ... الشهيرة في رسالته للمعلم هاشيت في شأن الحالة التي يكون فيها المنحني المعكس ارنا ... دائرة والاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة ولكن يرى هنا كذلك كون هذه القوانين لها مدلولات متسعة

ومن العجايب ان بوتيت لم يفتكر في شرحها وبسطها على ... ... ان يعتبر في الحقيقة انه متى تنعكس اوتتكسر الاشعة ... ... يقابلها منحنى اخر حيث ما اتفق يمكن ... احد هذه الاشعة ... صادرة من

نقطة تماسه بالاول من هذين المنحنيين ونقطة سقوطه كاحدى نقط الدائرة الالتصاقية للمنحنى الثانى بمعنى أن القوانين المنشئة لاجل الدائرة ولاجل الاشعة الساقطة من نقطة واحدة لاتزال موجودة ايضا بابدال نصف قطر الدائرة بنصف قطر الانحنا فى نقطة السقوط للمنحنى الذى هى الدائرة الالتصاقية له وبابدال بعد نقطة السقوط عن النقطة الشعاعية ببعد نقطة السقوط هذه عن نقطة تماس الشعاع الآتى اليها بالمنحنى المحيط بجميع الاشعة الساقطة وبغاية الضبط ينتقل من قضية التحرك فى الدائرة فى علم الميكانيكا الى قضية التحرك بطول منحن ما بالوجه المشروح عينه

انتهى

المهندسون الاولون الذين اشتغلوا بقضية الكوستيكات لم يصيبوا فى ظنهم حيث تخيل لهم امكان ابدال المنحنى المنعكس او الفاصل بالماس له فى نقطة السقوط وانما بين مطابقة قوانين لامسه بقوانين ثبت جواز ابدال هذا المنحنى بدائرته الالتصاقية فى نقطة السقوط